



## طراحی مسیر بهینه برای فرود نرم بر روی ماه با استفاده از همواری دیفرانسیلی

رضا جمیلنیا

استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه گیلان، رشت

رشت، صندوق پستی 4199613776، jamilnia@guilan.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 18 تیر 1396

پذیرش: 08 شهریور 1396

ارائه در سایت: 07 مهر 1396

کلید واژگان:

بهینه‌سازی مسیر

فرود نرم

کنترل بهینه

همواری دیفرانسیلی

منحنی‌های بی‌اسپلاین

### چکیده

در این مقاله، مسیرهای بهینه فرود نرم بر روی ماه براساس راهبردهای متفاوت فرود، طراحی می‌گردند. برای این منظور، مسئله فرود نرم در قالب یک مسئله کنترل بهینه و براساس کمینه‌کردن مصرف سوخت، تعریف شده و با یک روش مستقیم ترکیبی حل می‌شود. روش حل استفاده شده در این مقاله، ترکیبی از روش‌های هم‌نشانی مستقیم، برنامه‌ریزی غیرخطی، همواری دیفرانسیلی و منحنی‌های بی‌اسپلاین می‌باشد. در این روش، با استفاده از همواری دیفرانسیلی، معادلات دینامیکی فرود در کمترین فضای ابعادی ممکن و با حداقل تعداد متغیرهای حالت بیان می‌شوند. همچنین، متغیرهای حالت با منحنی‌های بی‌اسپلاین مناسب تقریب زده شده و نقاط کنترل این منحنی‌ها، به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی در نظر گرفته می‌شوند. با استفاده هم‌زمان از همواری دیفرانسیلی و منحنی‌های بی‌اسپلاین، تعداد متغیرها و قیود مسئله کنترل بهینه به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد و مسئله کنترل بهینه، با سرعت و دقت بالایی حل می‌گردد. در این مقاله، سه راهبرد مختلف برای فرود نرم بر روی ماه بررسی می‌شوند. این راهبردها براساس فرود مستقیم یا غیرمستقیم از مدار استقرار و نیز تفکیک مراحل ترمز افقی و نزول عمودی تعریف می‌گردند. با توجه به مسیرهای بهینه بدست‌آمده، می‌توان نتیجه گرفت که با فرود غیرمستقیم از طریق یک مدار واسط، وسیله فضایی می‌تواند با مصرف سوخت کمینه‌ای بر روی ماه فرود آید. همچنین، با تفکیک مراحل ترمز افقی و نزول عمودی، می‌توان مسیر فرود کاربردی‌تری را بدست آورد.

## Optimal trajectory design for soft landing on the Moon by using differential flatness

Reza Jamilnia

Faculty of Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran.  
P.O.B. 4199613776 Rasht, Iran, jamilnia@guilan.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 09 July 2017  
Accepted 30 August 2017  
Available Online 29 September 2017

#### Keywords:

Trajectory Optimization  
Soft Landing  
Optimal Control  
Differential Flatness  
B-spline Curves

### ABSTRACT

In this paper, optimal trajectories of soft landing on the Moon are designed based on different landing strategies. For this purpose, the problem of soft landing is defined as an optimal control problem to minimize fuel consumption and is solved by a combinational direct method. The used solution method in this paper is a combination of direct collocation method, nonlinear programming, differential flatness and B-spline curves. In this method, by using differential flatness, dynamic equations of landing are expressed by the minimum number of state variables in the minimum dimensional space. Also, state variables are approximated by B-spline curves, and control points of these curves are considered as optimization variables of the nonlinear programming problem. By simultaneous use of differential flatness and B-spline curves, the number of variables and constraints of the optimal control problem decrease significantly and the problem is solved with high accuracy and speed. In the paper, three different strategies for soft landing on the Moon are investigated. These strategies are defined based on direct or indirect landing from the parking orbit and separation of horizontal braking and vertical descent phases. According to achieved optimal trajectories, by indirect landing from an intermediate orbit, the space vehicle can be landed on the Moon with minimum fuel consumption. Also, by separation of horizontal braking and vertical descent phases, a more applicable landing trajectory can be achieved.

### 1- مقدمه

با توجه به برنامه‌های جاری و آتی سازمان‌های فضایی برای بازگشت به ماه به منظور انجام تحقیقات علمی و بهره‌برداری از منابع فراوان انرژی آن، در سال‌های اخیر تلاش‌های بسیاری برای تحلیل راهبردها و بهینه‌سازی مسیرهای فرود نرم بر روی ماه صورت پذیرفته است. مقصود از فرود نرم، فرود آرام و کنترل‌شده وسایل فضایی بر روی سطح ماه می‌باشد تا آسیبی متوجه محموله‌های فضایی نگردد. یکی از اصلی‌ترین

بهینه‌سازی مسیرهای فرود بر روی اجرام سماوی مختلف، یکی از چالش‌های اصلی در طراحی مأموریت‌های اکتشافی فضایی است. وجود راهبردهای متنوع برای فرود نرم و مطمئن وسایل فضایی و نیز دشواری فرایند بهینه‌سازی دقیق سامانه‌های دینامیکی، سبب گردیده تا طراحی مسیرهای بهینه فرود، مورد توجه بسیاری از محققان و طراحان مسیرهای فضایی قرار گیرد.

### Please cite this article using:

R. Jamilnia, Optimal trajectory design for soft landing on the Moon by using differential flatness, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 10, pp. 9-19, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

ارتفاع بهینه مدار واسط در قالب حل مسئله کنترل بهینه بدست آمده و در [4]، سرعت اولیه مطلوب وسیله فضایی محاسبه گردیده است.

برای طراحی مسیرهای بهینه فرود، رویکردهای متنوع دیگری نیز از سوی محققان مورد استفاده قرار گرفته است. در [7]، برخلاف کارهای دیگر، از تراست متغیر استفاده شده است. در مراجع [8,9]، بر فرود عمودی وسیله فضایی روی سطح ماه تمرکز شده است. در [10,11]، از ترکیب دو شیوه تراست ضربه‌ای و پیوسته برای فرود نرم استفاده شده است. در [12-14] نیز تمرکز بر هدایت و کنترل وسیله فضایی با رویکردهای مختلف بوده است.

در کارهای مذکور، به دلیل دشواری و حساسیت زیاد فرایند حل مسئله کنترل بهینه، امکان در نظر گرفتن راهبردهای گوناگون در قالب شرایط اولیه مختلف و قیاس نتایج آنها با یکدیگر وجود نداشته است. از این رو، لازم است تا روش حلی جامع و غیروابسته به شرایط مرزی و راهبردها، مورد استفاده قرار گیرد تا امکان قیاس مسیرهای بهینه تولیدی با یکدیگر فراهم شود.

در مقاله حاضر، مسئله فرود نرم بر روی ماه در قالب یک مسئله کنترل بهینه تعریف می‌گردد. برای تعریف این مسئله، از معادلات حرکت صفحه‌ای وسیله فضایی به دور ماه استفاده می‌شود. هدف از تعریف و حل این مسئله، کمینه‌کردن زمان فرود و به تبع آن، کمینه‌کردن سوخت مصرفی برای کاستن سرعت وسیله فضایی است تا شرایط لازم برای فرود نرم محقق گردد.

با توجه به مشکلات و دشواری‌های حل این مسئله کنترل بهینه با روش‌های مستقیم و غیرمستقیم متعارف، یک رویکرد ترکیبی نوین برای حل مسئله مذکور در این مقاله ارائه می‌شود. در این رویکرد، کل مسئله با بهره‌گیری از مفهوم همواری دیفرانسیلی<sup>5</sup>، به یک فضای ابعادی محدودتر نگاشت می‌شود و متغیرهای حالت و کنترل با خروجی‌های هموار و مشتقات آنها جایگزین می‌گردند. در این حالت، می‌توان کل مسئله را با کمترین تعداد متغیرها و معادلات حالت بیان نمود و حجم مسئله را با بهره‌گیری از روابط تحلیلی به نحو چشمگیری کاهش داد. همچنین در این رویکرد، خروجی‌های هموار با منحنی‌های بی‌اسپیلاین<sup>6</sup> تقریب زده می‌شوند تا به کمک نقاط کنترل این منحنی‌ها، تقریب پیوسته‌ای با متغیرهای گسسته حاصل شود. با در نظر گرفتن این متغیرهای گسسته (نقاط کنترل منحنی‌های بی‌اسپیلاین) به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی و اعمال معادلات حالت کاهش‌یافته در نقاط هم‌نشانی<sup>7</sup>، مسئله کنترل بهینه به سادگی و با دقت بسیار بالایی حل می‌شود. با تسهیل و تسریع حل دقیق مسئله، امکان تحلیل و مقایسه راهبردهای گوناگون فرود نرم در این مقاله حاصل می‌شود. شرایط مرزی مسئله کنترل بهینه در نظر گرفته شده در این مقاله، متناسب با راهبردهای فرود انتخابی، تغییر خواهد نمود. در این مقاله، سه راهبرد و سناریوی گوناگون برای فرود نرم بر روی ماه در نظر گرفته شده و با هم مقایسه می‌شوند. این راهبردها عبارتند از:

الف) فرود مستقیم از مدار استقرار

ب) فرود از مدار واسط طی یک مرحله پس از کاهش مداری اولیه

ج) فرود از مدار واسط طی دو مرحله پس از کاهش مداری اولیه

با انتخاب هر کدام از این سه راهبرد، شرایط مرزی مسئله کنترل بهینه تغییر خواهند کرد، اما معادلات حالت و تابع هدف بدون تغییر خواهند ماند.

## 2- تعریف مسئله فرود نرم بر روی ماه

در مقاله حاضر، به منظور بدست آوردن معادلات حرکت وسیله فضایی به دور

شاخصه‌های فرود نرم را می‌توان در قالب سرعت برخورد مطلوب وسایل فضایی با سطح ماه تبیین نمود که این سرعت برخورد، عموماً صفر یا قریب به صفر در نظر گرفته می‌شود.

در فرایند فرود بر روی اجرام سماوی، ابتدا باید وسیله فضایی را از مدار استقرار خود خارج نمود و به مداری نزدیک‌تر به سطح فرود، تنزل داد. این کاهش مداری باید به میزانی صورت پذیرد که عوارض سطحی یا خطاهای بالقوه هدایتی، منجر به آسیب وسیله فضایی نشود. برای ماه، مدار استقرار عموماً در ارتفاع 100 کیلومتری بوده و کاهش مداری به ارتفاع 10 تا 15 کیلومتری صورت می‌پذیرد.

پس از مرحله کاهش مداری، فرایند فرود وسیله آغاز می‌شود و با نشست نرم آن بر روی سطح به پایان می‌رسد. باید توجه داشت که بسیاری از اجرام سماوی نظیر ماه، فاقد جو محسوسی هستند و باید بخش عمده‌ای از سرعت وسیله توسط نیروی تراست معکوس تلف گردد تا سرعت برخورد صفر، حاصل شود. نیاز به استفاده از نیروی تراست، به معنی اختصاص یافتن بخشی از جرم محموله فضایی، به سوخت و سامانه پیش‌رانشی است. با یافتن مسیرهای بهینه فرود می‌توان تا حد ممکن، زمان استفاده از نیروی تراست و به تبع آن، میزان سوخت مصرفی را کاهش داد و به جرم مفید محموله فضایی افزود.

برای مرحله کاهش مداری، روش انتقال هاهمن<sup>1</sup> با بهره‌گیری از نیروی تراست ضربه‌ای، از سوی عموم طراحان مأموریت و مسیر، مورد قبول واقع شده است، چون انتقال هاهمن، یک انتقال مداری بهینه می‌باشد. اما برای مرحله کاهش سرعت (ترمز کردن) با استفاده از نیروی تراست، راهبردهای مختلفی پیشنهاد شده است. در تمامی این راهبردها لازم است تا مسئله فرود نرم در قالب یک مسئله کنترل بهینه (بهینه‌سازی دینامیکی) تعریف شود و کنترل‌ها و مسیرهای بهینه براساس اهداف مطلوب طراحان بدست آیند.

تعریف و حل دقیق مسئله کنترل بهینه فرود نرم، با وجود سادگی معادلات حاکم، از چالشی‌ترین فرایندهای طراحی مسیرهای بهینه می‌باشد. در حل این مسئله با روش غیرمستقیم، حساسیت بالای متغیرهای شبه حالت سبب دشواری فرایند حل و همگرایی آن می‌گردد و در حل با روش‌های مستقیم، دستیابی به حل دقیق و پیوسته با دشواری‌هایی روبروست.

در مراجع [1,2]، مسئله کنترل بهینه فرود نرم بر روی ماه با معادلات حرکت دو بعدی مدل‌سازی شده و شرایط مرزی آن با توجه به راهبردهای گوناگون فرود، تعیین گردیده است. سپس، با تعریف تابع همیلتونین<sup>2</sup>، معادلات شرایط لازم و کافی براساس روش حل غیرمستقیم بدست آمده و دسته معادلات با دو نقطه شرط مرزی، با روش جستجوی تصادفی کنترل‌شده<sup>3</sup> حل گردیده است. همین رویکرد برای حل مسئله در [3-5] دنبال شده، اما با این تفاوت که دسته معادلات با دو نقطه شرط مرزی، با روش پرتاب حل شده است. مسئله کنترل بهینه مذکور در [6] با روش مستقیم و تقریب شبه‌طیفی<sup>4</sup> حل شده است.

از منظر راهبردهای فرود، در مرجع [6]، مسیر بهینه فرود مستقیم از مدار استقرار به یک پایگاه فرود مشخص بر روی ماه بدست آمده است. در [1]، با در نظر گرفتن مرحله کاهش مداری از مدار استقرار به مدارهای پایین‌تر، مسیرهای بهینه فرود برای هر مدار واسط محاسبه گردیده و تلاش شده بهترین مدار واسط براساس تحلیل‌های گوناگون تعیین شود. در تحقیق ارائه‌شده در [3]، با آزاد در نظر گرفتن شرایط اولیه مسئله کنترل بهینه،

<sup>1</sup> Hohmann Transfer

<sup>2</sup> Hamiltonian

<sup>3</sup> Controlled Random Search

<sup>4</sup> Pseudospectral Approximation

<sup>5</sup> Differential Flatness

<sup>6</sup> B-spline Curves

<sup>7</sup> Collocation Points

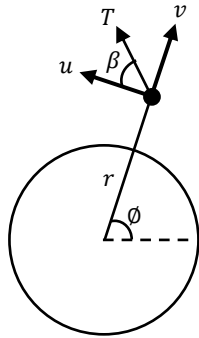


Fig. 1 State and control variables

شکل 1 متغیرهای حالت و کنترل

به مسیرهای بهینه یکسانی منجر می‌شوند، اما تابع هدف (9) از منظر همگرایی حل مسئله، انتخاب بهتری است. بدیهی است که در هر دو حالت، باید زمان نهایی مسئله، آزاد و متغیر در نظر گرفته شود.

برای لحاظ نمودن الزامات فرود نرم بر روی ماه، باید شرایط نهایی مسئله به گونه‌ای تعیین شوند که وسیله فضایی به آرامی بر روی سطح ماه بنشیند. در لحظه فرود، فاصله شعاعی وسیله از مرکز ماه باید برابر با شعاع متوسط ماه باشد و سرعت‌های مماسی و شعاعی وسیله صفر گردند. البته توصیه می‌شود که سرعت شعاعی وسیله در هنگام فرود، مقداری در حدود 5 m/s داشته باشد تا ارابه فرود وسیله، قدری در خاک ماه فرو رود. با توجه به این الزامات، شرایط نهایی مسئله باید به صورت زیر در نظر گرفته شوند:

$$r_f = R_M, \quad \phi_f = \text{free}, \quad u_f = 0 \text{ m/s}, \quad v_f = -5 \text{ m/s} \quad (10)$$

که در این روابط،  $R_M$  شعاع متوسط ماه است. مطابق با این شرایط، مقدار نهایی زاویه موقعیتی، آزاد می‌باشد. زیرا این موقعیت زاویه‌ای، نسبی است و نسبت به موقعیت زاویه‌ای اولیه فرود نرم سنجیده می‌شود. اگر جرم لحظه‌ای وسیله نیز به عنوان یک متغیر حالت لحاظ شود، شرایط نهایی آن را نیز باید به صورت آزاد در نظر گرفت.

به منظور تعیین شرایط اولیه مسئله کنترل بهینه فرود نرم، باید ابتدا راهبردهای فرود را مشخص نمود و سپس، متناسب با هر راهبرد، شرایط اولیه مسئله را تعیین نمود.

### 3- راهبردهای فرود نرم بر روی ماه

در این مقاله، سه راهبرد گوناگون برای فرود نرم بر روی ماه در نظر گرفته می‌شود که متناسب با هر یک از آنها، شرایط اولیه مربوطه قابل تعریف است.

#### 3-1- فرود مستقیم از مدار استقرار

در این راهبرد، وسیله فضایی مستقیماً از مدار استقرار بر روی سطح ماه فرود می‌آید. در این حالت، فاصله شعاعی اولیه برابر با شعاع مدار استقرار، سرعت مماسی اولیه برابر با سرعت مدار استقرار و سرعت شعاعی اولیه برابر با صفر می‌باشد. در این مقاله، زاویه موقعیتی اولیه را صفر درجه در نظر می‌گیریم. همانگونه که پیشتر اشاره شد، زاویه موقعیتی به صورت نسبی بدست می‌آید. برای محاسبه سرعت مماسی اولیه (سرعت مدار استقرار) می‌توان از رابطه (11) استفاده نمود:

$$u_0 = \sqrt{\frac{\mu_M}{r_p}} \quad (11)$$

که در آن،  $r_p$  شعاع مدار استقرار است. براین اساس، می‌توان شرایط اولیه

ماه، فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شود:

(الف) ماه، کروی و غیرچرخان بوده و میدان جاذبه آن یکنواخت است.

(ب) مدار استقرار، مسیر و محل فرود همگی هم صفحه هستند.

(ج) در طول مسیر، نیروی تراست وسیله فضایی ثابت است.

(د) اغتشاشات خارجی وجود ندارد.

لازم به ذکر است که فرضیات مطرح شده، با توجه به زمان کوتاه فرود و سازوکارهای عملیاتی فرود، چندان دور از واقعیت نبوده و تقریب مناسبی از شرایط عملیاتی واقعی ارائه خواهد کرد.

با توجه به فرضیات مذکور، معادلات حرکت صفحه‌ای وسیله فضایی به

دور ماه به صورت زیر خواهند بود:

$$\dot{r} = v \quad (1)$$

$$\dot{\phi} = \frac{u}{r} \quad (2)$$

$$\dot{u} = -\frac{uv}{r} + \frac{T}{m} \cos \beta \quad (3)$$

$$\dot{v} = \frac{u^2}{r} - \frac{\mu_M}{r^2} + \frac{T}{m} \sin \beta \quad (4)$$

$$\dot{m} = -\frac{T}{I_{sp}g_0} \quad (5)$$

که در این معادلات،  $r$  فاصله شعاعی،  $\phi$  زاویه موقعیتی (آنومالی واقعی)،  $u$  سرعت مماسی (افقی)،  $v$  سرعت شعاعی (عمودی) و  $\beta$  زاویه بردار تراست وسیله فضایی می‌باشند. همچنین، پارامتر گرانشی استاندارد ماه،  $m$  جرم لحظه‌ای وسیله،  $T$  مقدار نیروی تراست،  $I_{sp}$  ضربه ویژه سوخت و  $g_0$  شتاب جاذبه زمین می‌باشند.

معادلات حالت فوق، دربرگیرنده چهار متغیر حالت ( $\vec{x} = [r, \phi, u, v]$ ) و یک متغیر کنترل ( $\vec{u} = \beta$ ) می‌باشند که این متغیرها به همراه نیروی تراست در شکل 1 نشان داده شده‌اند.

متغیر  $m$  را هم می‌توان به عنوان متغیر حالت در نظر گرفت. اما باید توجه داشت که سمت راست معادله حالت آن، صرفاً وابسته به زمان بوده و مستقل از سایر متغیرهای حالت و کنترل است. پس می‌توان آن را از شمول متغیرهای حالت خارج نمود و با داشتن مقدار اولیه آن ( $m_0$ )، جرم لحظه‌ای وسیله را در هر مقطع از زمان ( $t$ ) به صورت رابطه (6) محاسبه نمود:

$$m = m_0 - \frac{T}{I_{sp}g_0} t \quad (6)$$

لازم به ذکر است که در این مقاله، مقدار نیروی تراست و ضربه ویژه سوخت در طول فرود وسیله فضایی، ثابت فرض شده و اعمال نیروی تراست بر وسیله به صورت پیوسته و مداوم می‌باشد. در نتیجه، جرم وسیله فضایی در پایان فرایند فرود، تنها به طول زمان این فرایند بستگی دارد. با صفر در نظر گرفتن مبدأ زمانی ( $t_0 = 0$ ) و داشتن زمان نهایی فرایند فرود ( $t_f$ )، می‌توان جرم نهایی وسیله فضایی را از رابطه (7) بدست آورد:

$$m_f = m_0 - \frac{T}{I_{sp}g_0} t_f \quad (7)$$

بنابراین، برای اینکه جرم وسیله فضایی در پایان فرود بیشینه شود، باید زمان نهایی فرایند فرود کمینه گردد. با کمینه کردن زمان نهایی، جرم سوخت مصرفی وسیله برای فرود نرم بر روی ماه، کمینه گردیده و جرم بیشتری به محموله اصلی وسیله فضایی اختصاص می‌یابد. بر این اساس، تابع هدف مسئله کنترل بهینه را می‌توان به یکی از دو صورت زیر در نظر گرفت:

$$J = -m_f \quad (8)$$

$$J = t_f \quad (9)$$

هر دو تابع هدف (بیشینه کردن جرم نهایی و کمینه کردن زمان نهایی)

مسئله فرود نرم را برای این راهبرد به صورت رابطه (12) در نظر گرفت:

$$r_0 = r_p, \quad \theta_0 = 0^\circ, \quad u_0 = \sqrt{\frac{\mu_M}{r_p}}, \quad v_0 = 0 \text{ m/s} \quad (12)$$

### 2-3- فرود از مدار واسط طی یک مرحله پس از کاهش مداری اولیه

در این راهبرد، وسیله فضایی ابتدا با یک کاهش مداری به مداری نزدیک تر به سطح ماه آمده و سپس، از این مدار واسط بر روی سطح ماه فرود می‌آید. برای کاهش مداری، عموماً از انتقال هاهمن استفاده می‌شود. در این حالت، شرایط وسیله فضایی در هنگام ورود به مدار واسط، به عنوان شرایط اولیه مسیر فرود در نظر گرفته می‌شود. یعنی، به محض ورود وسیله به مدار واسط (نقطه حضیض مدار انتقال هاهمن)، فرایند فرود نرم آغاز می‌گردد. در نتیجه، فاصله شعاعی اولیه برابر با شعاع مدار واسط، سرعت مماسی اولیه برابر با سرعت ورود به مدار واسط و سرعت شعاعی اولیه برابر با صفر می‌باشد.

برای محاسبه سرعت مماسی اولیه (سرعت ورود به مدار واسط) می‌توان از رابطه انتقال هاهمن به صورت رابطه (13) استفاده نمود:

$$u_0 = \sqrt{\mu_M \left( \frac{2}{r_i} - \frac{2}{r_i + r_p} \right)} \quad (13)$$

که در آن،  $r_i$  شعاع مدار واسط است. براین اساس، می‌توان شرایط اولیه مسئله فرود نرم را برای این راهبرد به صورت رابطه (14) در نظر گرفت:

$$r_0 = r_i, \quad \theta_0 = 0^\circ, \quad v_0 = 0 \text{ m/s} \\ u_0 = \sqrt{\mu_M \left( \frac{2}{r_i} - \frac{2}{r_i + r_p} \right)} \quad (14)$$

باید توجه داشت که وسیله فضایی برای کاهش مداری، نیاز به مصرف سوخت دارد. در نتیجه، جرم وسیله در ابتدای فرایند فرود، نسبت به جرم آن در مدار استقرار، کمتر می‌باشد. برای محاسبه جرم اولیه فرود، می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود:

$$m_0 = M \exp \left( \frac{\sqrt{\mu_M \left( \frac{2}{r_p} - \frac{2}{r_i + r_p} \right)} - \sqrt{\mu_M \frac{1}{r_p}}}{I_{sp} g_0} \right) \quad (15)$$

که در آن،  $M$  جرم وسیله فضایی در مدار استقرار است.

### 3-3- فرود از مدار واسط طی دو مرحله پس از کاهش مداری اولیه

در راهبرد پیشین، پس از کاهش مداری، وسیله فضایی با کاهش هم‌زمان سرعت مماسی و شعاعی، بر روی سطح ماه فرود می‌آید. با توجه به اینکه بخش عمده‌ای از کاهش سرعت، مربوط به سرعت مماسی است، راهبرد جدیدی جهت تفکیک کاهش سرعت‌های مماسی و شعاعی پیشنهاد می‌گردد. به این صورت که پس از کاهش مداری، در مرحله اول فرود، سرعت مماسی (افقی) و وسیله کاهش یافته و به صفر می‌رسد و در مرحله دوم فرود، سرعت شعاعی (عمودی) و وسیله کاهش یافته و به سرعت مطلوب برای فرود نرم می‌رسد. یعنی در مرحله اول، ترمز افقی و در مرحله دوم، نزول عمودی صورت می‌پذیرد. بنابراین، در این راهبرد، مسئله کنترل بهینه فرود نرم به صورت دو مرحله‌ای (دو فازی) خواهد بود. زمان نهایی هر دو مرحله، آزاد می‌باشد. شرایط اولیه مرحله اول، مطابق با شرایط اولیه راهبرد پیشین (روابط (14)) و شرایط نهایی مرحله دوم، مطابق با شرایط نهایی کل مسئله (روابط (10)) می‌باشد. اما شرایط نهایی مرحله اول که همان شرایط اولیه مرحله دوم است به این صورت خواهد بود که سرعت مماسی وسیله در ارتفاع مشخصی از سطح ماه به صفر برسد. با صفرشدن سرعت مماسی، وسیله در پایان مرحله

اول، تنها دارای سرعت شعاعی خواهد بود که باید به صورت آزاد در نظر گرفته شود تا مقدار بهینه آن بدست آید. براین اساس، شرایط میانی مسئله (مابین دو مرحله) باید به صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$r_{12} = \text{specified}, \quad \theta_{12} = \text{free}, \quad u_{12} = 0 \text{ m/s}, \quad v_{12} = \text{free} \quad (16)$$

فرایند تعریف مسئله کنترل بهینه فرود نرم بر روی ماه، با مشخص شدن تابع هدف، معادلات حالت، شرایط اولیه و نهایی (برای سه راهبرد)، در اینجا به اتمام رسید. حال باید به دنبال راهکاری برای حل دقیق و سریع این مسئله بود تا بتوان براساس نتایج حاصله، راهبردهای گوناگون را با هم مقایسه نمود.

### 4- رویکرد ترکیبی برای حل مسائل کنترل بهینه

در بخش‌های پیشین، مسئله کنترل بهینه فرود نرم بر روی ماه با راهبردهای گوناگون فرود تعریف گردید. در این بخش، با ارائه یک رویکرد جدید برای حل مسائل کنترل بهینه، این مسئله حل می‌شود.

به طور کلی، سه روش متداول برای حل مسائل کنترل بهینه (بهینه‌سازی مسیر) وجود دارد که عبارتند از: روش غیرمستقیم، روش پرتاب مستقیم و روش هم‌نشانی مستقیم. سایر روش‌های حل به نوعی توسعه یافته یا زیرمجموعه این سه روش هستند.

در روش غیرمستقیم، با تعریف تابع همیلتونین و استفاده از اصل بیشینگی پونتریاگین<sup>1</sup>، معادلات شرایط لازم و کافی برای بهینگی بدست می‌آیند. در این معادلات، متغیرهای کنترل با تعریف متغیرهای شبه‌حالت (الحاقی) حذف گردیده و مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیلی و جبری با دو یا چند نقطه شرط مرزی بدست می‌آید. این مجموعه معادلات را می‌توان با روش‌های مختلف عددی حل نمود. طراحان مسیرهای بهینه در استفاده از روش غیرمستقیم عموماً با دو مشکل مواجه می‌شوند: یکی، دشواری فرایند تولید معادلات شرایط لازم به دلیل ماهیت تحلیلی و دیگری، دشواری فرایند تولید حدس‌های اولیه برای متغیرهای شبه‌حالت که معمولاً فاقد مفهوم فیزیکی هستند و حساسیت بسیار زیادی به حدس‌های اولیه دارند [15]. در مسئله کنترل بهینه فرود نرم، مشکل دوم بارزتر بوده و متغیرهای شبه‌حالت مسئله علیرغم سادگی معادلات، بسیار حساس به حدس‌های اولیه هستند.

در روش پرتاب مستقیم، با تقریب متغیرهای کنترل با منحنی‌های مختلف و در نظر گرفتن پارامترهای منحنی‌ها به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی، یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی بدست می‌آید که قابل حل با روش‌های عددی مختلف است. این روش، مشکلات روش غیرمستقیم را ندارد، اما به دلیل انجام مکرر فرایند انتگرال‌گیری عددی معادلات حالت و انجام فرایند پرتاب برای متغیرهای حالت فاقد مقدار اولیه، دارای سرعت حل و میل همگرایی بسیار پایینی است [15].

در روش هم‌نشانی مستقیم، با گسسته‌سازی کامل مسئله و تبدیل معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی به معادلات جبری ساده، امکان استفاده از روش‌های متنوع برنامه‌ریزی غیرخطی فراهم می‌شود [16, 17]. در این روش، با تقسیم بازه زمانی مسئله به زیربازه‌های زمانی کوچک‌تر، معادلات حالت برای هر زیربازه به صورت عبارات جبری ساده درمی‌آید. به نقاط ابتدا و انتهای هر زیربازه زمانی، گره‌های زمانی (نقاط هم‌نشانی) می‌گویند. در این روش، به جای توابع زمانی حالت و کنترل، مقادیر گسسته حالت و کنترل در گره‌های زمانی، به عنوان متغیرهای مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی در نظر گرفته می‌شوند. در روش هم‌نشانی مستقیم، به منظور کاهش خطای

<sup>1</sup> Pontryagin's Maximum Principle

$$\vec{q} = \vec{h}(\vec{x}, \vec{u}, \dot{\vec{u}}, \ddot{\vec{u}}, \dots) \quad (17)$$

به گونه‌ای که بتوان به کمک آن، متغیرهای حالت ( $\vec{x}$ ) و کنترل ( $\vec{u}$ ) را به صورت زیر بدست آورد:

$$(\vec{x}, \vec{u}) = \vec{w}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}, \dots) \quad (18)$$

متغیرهای  $\vec{q}$  می‌توانند معادل با برخی از متغیرهای حالت یا ترکیبی از آنها باشند. این متغیرها لزوماً متغیرهای قابل قرائت از طریق حسگرها نمی‌باشند و تحت عنوان خروجی‌های هموار شناخته می‌شوند.

ویژگی بارز سیستم‌های هموار دیفرانسیلی این است که می‌توان کل رفتار سیستم را بدون انتگرال‌گیری و تنها با استفاده از خروجی‌های هموار و تعداد محدودی از مشتقات زمانی آنها بیان نمود. البته باید توجه داشت که به دلیل استفاده از مشتقات مراتب بالای خروجی‌های هموار، استفاده از روش تفاضل محدود برای محاسبات مشتقات، دیگر معقول نخواهد بود.

اگر از مفهوم همواری دیفرانسیلی در کنترل بهینه استفاده شود، می‌توان فرآیند هم‌نشانی و تقریب را به جای کل متغیرهای حالت و کنترل، تنها بر خروجی‌های هموار اعمال نمود. با این کار، کاهش شدیدی در تعداد متغیرهای بهینه‌سازی رخ می‌دهد. همچنین، با توجه به بهره‌گیری از معادلات حالت برای بدست‌آوردن روابط موجود میان خروجی‌های هموار و سایر متغیرهای حالت و کنترل مسئله، عملاً تعدادی از معادلات حالت نیز حذف می‌شوند که این کار سبب کاهش شدید تعداد قیود بهینه‌سازی می‌شود. مزیت جالب‌توجه استفاده از مفهوم همواری دیفرانسیلی در کنترل بهینه این است که تعداد متغیرها و معادلات با هم کاهش می‌یابند. این کاهش هم‌زمان، سبب کوچک‌شدن قابل‌توجه ماتریس ژاکوبین<sup>1</sup> و ماتریس هسیان لاگرانژین<sup>2</sup> می‌گردد. محاسبات این ماتریس‌ها، بخش قابل‌توجهی از زمان حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی را به خود صرف می‌کنند. در نتیجه، کوچک‌شدن آنها تأثیر بسیار زیادی در افزایش سرعت حل دارد.

عدم وجود یک روش نظام‌مند برای تشخیص همواری یا ناهمواری دیفرانسیلی و نیز عدم وجود یک الگوریتم مناسب برای تعیین کمینه خروجی‌های هموار، دشواری‌هایی را در استفاده از همواری دیفرانسیلی برای کنترل بهینه در ذهن متبادر می‌سازد. باید به این نکته بسیار مهم اشاره کرد که در رویکرد ترکیبی، صرفاً از مفهوم همواری دیفرانسیلی استفاده می‌شود. در این رویکرد، هموار بودن سیستم از لحاظ دیفرانسیلی ضرورت ندارد. یعنی حتی اگر سیستم ناهموار بود، باز هم خروجی‌های هموار شناسایی شده و سایر متغیرهای حالت و کنترل بر اساس خروجی‌های هموار بدست می‌آیند و فضای ابعادی مسئله کاهش داده می‌شود. تنها تفاوت در اینجا خواهد بود که اگر سیستم از لحاظ دیفرانسیلی هموار باشد، دیگر معادله حالتی برای آن در فضای کاهش‌یافته باقی نخواهد ماند، اما اگر سیستم ناهموار باشد، در فضای کاهش‌یافته مسئله نیز معادلات حالت وجود دارند. بنابراین، برای استفاده از مفهوم همواری دیفرانسیلی برای کنترل بهینه، نیازی به تشخیص همواری یا ناهمواری دیفرانسیلی نیست.

در سیستم‌های دینامیکی متعارف، تعیین خروجی‌های هموار از طریق آزمون و خطا چندان پیچیده نمی‌باشد. متغیرهای موقعیتی، معمولاً بهترین انتخاب برای خروجی‌های هموار در سیستم‌های دینامیکی متعارف می‌باشند. زیرا با دراختیارداشتن تابع زمانی متغیرهای موقعیتی، می‌توان مقادیر سایر متغیرهای حالت و کنترل را در زمان‌های مختلف بدست آورد. در واقع، اگر مسیر فیزیکی طی‌شده توسط یک وسیله معلوم باشد، متغیرهای حالت و

گسسته‌سازی، باید گره‌های زمانی زیادی تعریف شوند که این امر، سبب ایجاد تعداد زیادی متغیر و قید بهینه‌سازی می‌گردد. همچنین، پاسخ بهینه حاصله، گسسته می‌باشد که با ماهیت پیوسته مسئله مغایرت دارد.

با توجه به مشکلاتی که روش‌های متعارف حل مسائل کنترل بهینه دارند، در این مقاله می‌خواهیم از یک رویکرد ترکیبی جدید استفاده نماییم. این رویکرد قادر است مسائل کنترل بهینه را با دقت و سرعت بالایی حل کرده و پاسخ بهینه پیوسته‌ای را ارائه نماید.

رویکرد ترکیبی بر مبنای استفاده هم‌زمان از مفاهیم همواری دیفرانسیلی، منحنی‌های بی‌اسپیلاین، هم‌نشانی مستقیم و برنامه‌ریزی غیرخطی پایه‌ریزی شده است. در این رویکرد، با بهره‌گیری از مفهوم همواری دیفرانسیلی، فضای ابعادی مسئله کنترل بهینه کاهش یافته و مسئله با حداقل تعداد متغیرها و معادلات حالت بیان می‌شود. همچنین، با استفاده از منحنی‌های بی‌اسپیلاین، علیرغم حفظ ماهیت گسسته متغیرهای بهینه‌سازی، مفهوم پیوسته‌ای از حل بدست می‌آید و نقش گره‌های زمانی در تقریب عبارات دیفرانسیلی و انتگرالی مسئله از بین می‌رود. در این رویکرد، با بهره‌گیری از مفهوم هم‌نشانی و گره‌های زمانی، معادلات حالت و قیود مسیری در گره‌های زمانی اعمال می‌گردند و در نهایت، نقاط کنترل منحنی‌های بی‌اسپیلاین به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی در نظر گرفته می‌شوند [15]. در ادامه، پیرامون هر یک از اجزای رویکرد ترکیبی به تفصیل بحث خواهد شد.

#### 1-4- همواری دیفرانسیلی

در روش هم‌نشانی مستقیم کلاسیک، فرآیند هم‌نشانی بر روی کلیه متغیرهای حالت و کنترل اعمال می‌شود. این امر، سبب تولید تعداد زیادی متغیر و قید بهینه‌سازی می‌گردد.

در سال‌های اخیر، گروهی از محققان نشان داده‌اند که می‌توان با حذف متغیرهای کنترل از معادلات حالت، فرآیند هم‌نشانی را تنها بر متغیرهای حالت اعمال کرد و پس از همگرایی و حل مسئله، با بهره‌گیری از مقادیر بهینه محاسبه‌شده برای متغیرهای حالت، مقادیر بهینه متغیرهای کنترل را محاسبه نمود [18]. به این رویکرد، روش معکوس گفته می‌شود. در روش معکوس، ابتدا با استفاده از معادلات حالت، رابطه‌های موجود میان متغیرهای کنترل و متغیرهای حالت و مشتقات زمانی مرتبه اول آنها بدست می‌آید. سپس، باقیمانده معادلات حالت بر حسب روابط بدست‌آمده بازنویسی می‌شود. در این روش، برای محاسبه مشتقات متغیرهای حالت از روش تفاضل محدود استفاده می‌شود. مزیت روش معکوس، حذف متغیرهای کنترل از فرآیند هم‌نشانی، همگرایی و حل می‌باشد. همچنین در این روش، معادلات حالتی که در بدست‌آوردن روابط میان متغیرهای حالت و کنترل مورد استفاده قرار گرفته‌اند نیز حذف می‌شوند. استفاده از این روش، تا حدودی در تسریع حل مؤثر می‌باشد.

اما در سال‌های اخیر، گروه دیگری از محققان نشان داده‌اند که می‌توان علاوه بر متغیرهای کنترل، برخی از متغیرهای حالت را نیز از مسئله حذف نمود و فرآیند هم‌نشانی را تنها بر متغیرهای حالت باقیمانده اعمال کرد. پس از حل، می‌توان با بهره‌گیری از روابط موجود، مقادیر بهینه متغیرهای حالت و کنترل حذف‌شده را محاسبه نمود. رویکرد اخیر تنها در سیستم‌های غیرخطی هموار از لحاظ دیفرانسیلی امکان‌پذیر می‌باشد.

یک سیستم دینامیکی غیرخطی هنگامی از لحاظ دیفرانسیلی هموار می‌باشد که تغییر متغیری به صورت زیر برای آن وجود داشته باشد [19]:

<sup>1</sup> Jacobian Matrix

<sup>2</sup> Hessian of the Lagrangian Matrix

$$B_{i,k}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k+1}-t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t) \quad (24)$$

نقاط کنترل در یک منحنی بی‌اسپیلاین، نقاطی در اطراف منحنی هستند که به آن منحنی شکل می‌دهند و به معنای واقعی کلمه، کنترل‌کننده منحنی می‌باشند. نقاط کنترل در منحنی‌های بی‌اسپیلاین مثل ضرایب چندجمله‌ای‌ها، مقادیری گسسته هستند که مفهوم پیوسته‌ای را تولید می‌نمایند. در تقریب متغیرهای حالت و کنترل، می‌توان این نقاط کنترل را به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی در نظر گرفت.

منحنی‌های بی‌اسپیلاین رفتاری کاملاً محلی دارند. با تغییر یکی از نقاط کنترل، بسته به درجه منحنی، تنها شکل منحنی در همسایگی نقطه کنترل مزبور تغییر می‌کند و باقی منحنی، بدون تغییر باقی می‌ماند. همچنین، محدوده تغییرات نقاط کنترل در منحنی‌های بی‌اسپیلاین یکسان بوده و تقریباً برابر با محدوده تغییرات متغیر تقریب‌زده شده می‌باشد. در صورت استفاده از منحنی‌های بی‌اسپیلاین برای تقریب متغیرهای مسئله بهینه‌سازی مسیر، امکان محاسبه دقیق مشتقات زمانی متغیرها با توجه به مشخص بودن مشتقات زمانی توابع منحنی‌های بی‌اسپیلاین به سادگی فراهم می‌باشد.

#### 3-4- هم‌نشانی مستقیم و برنامه‌ریزی غیرخطی

در روش هم‌نشانی مستقیم، از گره‌های زمانی برای دو منظور استفاده می‌شود. یکی از کارکردهای گره‌های زمانی در تقریب عبارات دیفرانسیلی و انتگرالی می‌باشد. از اینرو، برای دستیابی به تقریب‌های بهتر، باید تعداد گره‌های زمانی زیادی انتخاب شود. کارکرد دیگر گره‌های زمانی در اعمال قیود مسئله کنترل بهینه می‌باشد. معادلات حالت و قیود مسیری در روش هم‌نشانی مستقیم، در گره‌های زمانی اعمال می‌گردند [21].

در صورت استفاده از منحنی‌های بی‌اسپیلاین، نقش گره‌های زمانی در تقریب عبارات دیفرانسیلی و انتگرالی از بین می‌رود و از گره‌های زمانی تنها برای اعمال قیود مسئله استفاده می‌شود. این امر سبب می‌گردد تا ضرورت استفاده از گره‌های زمانی زیاد تا حدود زیادی از بین برود.

برای حل مسئله کنترل بهینه با رویکرد ترکیبی، خروجی‌های هموار تعیین‌شده از همواری دیفرانسیلی، با منحنی‌های بی‌اسپیلاین تقریب زده می‌شوند. با این کار، نقاط کنترل منحنی‌های مذکور به عنوان متغیرهای بهینه‌سازی مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی در نظر گرفته می‌شوند. در طول فرآیند حل، بسته به مقدار متغیرهای بهینه‌سازی در هر تکرار، نقاط کنترل منحنی‌های بی‌اسپیلاین مشخص می‌گردند. با مشخص بودن این نقاط و به تبع آن توابع منحنی‌ها، می‌توان مقادیر سایر متغیرهای حالت و کنترل را محاسبه نمود.

با اعمال معادلات حالت باقیمانده در گره‌های زمانی (نقاط هم‌نشانی)، عملاً کلیه معادلات حالت بر مسئله اعمال می‌شوند. افزون بر معادلات حالت باقیمانده، قیود مسیری نیز در گره‌های زمانی اعمال می‌شوند. پس از همگرایی و حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی، مقادیر بهینه نقاط کنترل خروجی‌های هموار بگونه‌ای بدست می‌آیند که ضمن برقراری معادلات حالت و ارضای قیود مسیری در گره‌های زمانی، تابع هدف نیز کمینه باشد.

برای مقیاس‌بندی، مرزبندی و تولید حدس‌های اولیه برای متغیرهای بهینه‌سازی (نقاط کنترل منحنی‌های بی‌اسپیلاین)، می‌توان از همان سازوکارهای روش کلاسیک هم‌نشانی مستقیم استفاده نمود، زیرا نقاط کنترل مذکور با خروجی‌های هموار، تقریباً هم‌اندازه می‌باشند.

مقیاس‌بندی صحیح متغیرها و قیود بهینه‌سازی، تأثیر بسزایی در سرعت

کنترل آن قابل محاسبه خواهد بود. بنابراین، برای استفاده از مفهوم همواری دیفرانسیلی، نیازی به تدوین یک الگوریتم خاص برای تعیین خروجی‌های هموار نیست و انتخاب متغیرهای موقعیتی به عنوان خروجی‌های هموار در غالب مسائل کنترل بهینه راهگشاست.

#### 2-4- منحنی بی‌اسپیلاین

در روش هم‌نشانی مستقیم، متغیرهای حالت و کنترل به صورت مجموعه‌ای از نقاط گسسته تقریب زده می‌شوند. این امر سبب می‌گردد تا ماهیت حل، گسسته شود و امکان محاسبه مشتق و انتگرال توابع به صورت دقیق وجود نداشته باشد. این مشکل در صورت استفاده از مفهوم همواری دیفرانسیلی حادث‌تر نیز می‌شود، زیرا در آن حالت، امکان محاسبه دقیق مشتقات مراتب بالا با دراختیار داشتن نقاط گسسته وجود ندارد. این درحالیست که گسستگی نقاط، سبب تبدیل شدن مسئله کنترل بهینه به مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی می‌شود و صرف‌نظر کردن از آن امکان‌پذیر نیست. یکی از راه‌های حل این مشکل، استفاده از منحنی‌هاست. در منحنی‌ها، اگرچه ضرایب یا نقاط کنترل، مقادیری گسسته هستند، اما یک مفهوم پیوسته را تولید می‌نمایند. در صورت تقریب متغیرهای حالت و کنترل با منحنی‌ها، هم گسستگی مسئله به دلیل گسستگی ضرایب یا نقاط کنترل حفظ می‌شود و هم امکان محاسبه دقیق مشتقات و انتگرال‌ها به دلیل دراختیار داشتن توابع منحنی‌ها وجود دارد.

در روش ترکیبی، از منحنی‌های بی‌اسپیلاین برای تقریب متغیرهای مسئله کنترل بهینه استفاده می‌نماییم. این منحنی‌ها، مجموعه به‌هم‌پیوسته‌ای از منحنی‌های بیزی به‌شاند [20]:

$$x(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,k}(t) C_i \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (19)$$

معادلات منحنی‌های بی‌اسپیلاین از دو قسمت توابع پایه  $(B_{i,k}(t))$  و نقاط کنترل  $(C_i)$  تشکیل شده‌اند. برای محاسبه توابع پایه یک منحنی بی‌اسپیلاین، باید ابتدا تعداد منحنی‌های بیزی و درجات آنها متناسب با پیچیدگی مسیر موردانتظار برای متغیر تقریب‌زده شده، مشخص گردد. سپس، بازه زمانی با توجه به تعداد منحنی‌های بیزی، تقسیم‌بندی گردند. به نقاط زمانی این تقسیم‌بندی، گره می‌گویند. با کنار هم قراردادن مقادیر زمانی گره‌ها در یک بردار، بردار گره  $(\vec{t})$  تشکیل می‌شود:

$$\vec{t} = [t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n] \quad (20)$$

در بردار گره، ممکن است یک مقدار زمانی چندبار پشت سرهم تکرار گردد که به میزان دفعات تکرار، تعدد می‌گویند. تفاضل مرتبه منحنی  $(k_i)$  و تعدد گره مربوطه  $(m_i)$ ، میزان همواری  $(s_i)$  را مشخص می‌نماید:

$$s_i = k_i - m_i \quad (21)$$

مقدار همواری، بیانگر سطح پیوستگی در گره می‌باشد که برابر با مرتبه مشتق‌پذیری است. بنابراین، سطح پیوستگی در گره‌ها را می‌توان در تعریف بردار گره و با تکرار مقادیر زمانی گره‌ها اعمال نمود. لازم به ذکر است که مرتبه منحنی، برابر با مقدار درجه منحنی بعلاوه یک می‌باشد.

با در اختیار داشتن مرتبه منحنی‌ها  $(k)$ ، تعداد منحنی‌ها  $(l)$  و همواری گره‌ها  $(s)$ ، می‌توان تعداد نقاط کنترل  $(P)$  را مشخص نمود:

$$P = l(k - s) + s \quad (22)$$

با مشخص بودن موارد مذکور، می‌توان با بهره‌گیری از روابط بازگشتی

زیر، توابع پایه را محاسبه نمود:

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & t < t_i, t > t_{i+1} \end{cases} \quad (23)$$

$$\tan \beta = \frac{\ddot{r} - \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} + \frac{\mu_M}{r^2}}{\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + \frac{(r\dot{\theta})\dot{r}}{r}} \quad (31)$$

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu_M}{r^2}}{2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}} \right) \quad (32)$$

همان گونه که ملاحظه شد، با بهره‌گیری از همواری دیفرانسیلی، می‌توان دو متغیر حالت (سرعت مماسی و سرعت شعاعی) و یک متغیر کنترل (زاویه بردار تراست) را بر حسب خروجی‌های هموار (فاصله شعاعی و زاویه موقعیتی) بدست آورد. بنابراین می‌توان کل مسئله را صرفاً براساس خروجی‌های هموار و مشتقات زمانی آنها بازتعریف نمود.

با توجه به استفاده از معادلات (1) و (2) برای بدست آوردن روابط (25) و (26)، این دو معادله حالت باید حذف شوند. همچنین با عنایت به تلفیق معادلات (3) و (4) برای بدست آوردن رابطه (32)، یک معادله حالت دیگر باید حذف شود و صرفاً یک معادله حالت باقی بماند. برای این منظور، می‌توان به دلخواه، یکی از معادلات (3) یا (4) را حذف و دیگری را باقی گذاشت. اما در اینجا بهتر است با ترکیب این دو معادله، معادله باقیمانده را به روالی که در ادامه بیان می‌شود، بدست آورد.

اگر ابتدا طرفین معادلات (29) و (30) به توان دو برسند و سپس دو معادله به توان رسیده باهم جمع شوند، رابطه (33) بدست می‌آید:

$$(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})^2 + \left( \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu_M}{r^2} \right)^2 = \left( \frac{T}{m} \right)^2 \quad (33)$$

مزیت رابطه (33) این است که فاقد توابع مثلثاتی است. توابع مثلثاتی به دلیل تولید خروجی‌های یکسان به ازای ورودی‌های با  $2\pi$  اختلاف، همگرایی فرایند بهینه‌سازی را با دشواری‌هایی مواجه می‌کنند. رابطه (33) در فضای حالت بیان نگردیده است که البته این امر، باعث ایجاد مشکلی در رویکرد ترکیبی نخواهد شد. رابطه (33) می‌تواند جایگزین چهار معادله حالت مسئله (معادلات (1) تا (4)) گردد، زیرا تمامی این معادلات در آن مستتر است.

همان گونه که در این بخش ملاحظه شد، با استفاده از مفهوم همواری دیفرانسیلی می‌توان تعداد متغیرهای حالت و کنترل مسئله موردنظر را از پنج متغیر به دو متغیر (خروجی‌های هموار) و تعداد معادلات حالت را از چهار معادله به یک معادله کاهش داد. این کاهش فضای ابعادی، سبب افزایش قابل توجه سرعت حل مسئله می‌گردد و در عین حال، به دلیل ماهیت تحلیلی خود، دقت حل بالاتری نسبت به سایر روش‌های حل ارائه می‌نماید.

در رویکرد ترکیبی، از منحنی‌های بی‌اسپیلاین برای تقریب خروجی‌های هموار استفاده می‌شود. با توجه به انتخاب متغیرهای موقعیتی به عنوان خروجی‌های هموار (که عموماً هموار و کم پیچ و خم می‌باشند)، دیگر نیازی به استفاده از منحنی‌های بسیار منعطف (با مرتبه بالا) نیست. اما باید توجه داشت که متغیر کنترل مسئله با مشتقات دوم خروجی‌های هموار در ارتباط است. یعنی اگر از منحنی‌های مرتبه چهارم (درجه سوم) برای تقریب خروجی‌های هموار استفاده شود، متغیر کنترل به صورت خطی بدست خواهد آمد. همچنین، باید به سطح پیوستگی میان منحنی‌های به هم چسبیده بیزیه (که منحنی بی‌اسپیلاین را تشکیل می‌دهند) نیز توجه نمود تا سطح پیوستگی در متغیر کنترل نیز پس از دوبرار مشتق‌گیری در حد مطلوب حفظ شود. براین اساس، برای تضمین همواری و سطح پیوستگی کافی برای متغیر کنترل، مرتبه منحنی‌های بی‌اسپیلاین باید حداقل 6 و سطح پیوستگی آنها حداقل 5 باشد. همچنین، با توجه به خروجی‌های هموار انتخابی، استفاده از 10 منحنی به هم پیوسته بیزیه در هر منحنی بی‌اسپیلاین کفایت خواهد کرد. البته می‌توان از تعداد منحنی‌ها کاست و به مرتبه منحنی‌ها افزود. مقادیر

حل و همگرایی مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی دارند. عموماً توصیه می‌شود که به منظور دستیابی به بهترین و سریع‌ترین پاسخ‌های بهینه، محدوده تغییرات تمامی متغیرها و قيود به بازه‌های [0,1] یا [-0.5,0.5] نگاشت گردند.

در رویکرد ترکیبی، دقت حل فدای سرعت حل نشده است و این دو توأمان ارتقاء یافته‌اند. در این رویکرد، به دلیل بهره‌مندی از مفهوم همواری دیفرانسیلی، ارتباط میان متغیرها با مشتقات زمانی و براساس روابط تحلیلی برقرار می‌گردد، درحالی‌که در روش هم‌نشانی مستقیم کلاسیک، ارتباط میان متغیرها با اعمال معادلات حالت گسسته در گره‌های زمانی متوالی برقرار می‌شود. در نتیجه، دقت حل در رویکرد ترکیبی بسیار بالاتر است. سرعت حل نیز به دلیل کاهش تعداد متغیرها و قيود بهینه‌سازی، بسیار بیشتر از روش هم‌نشانی مستقیم کلاسیک می‌باشد.

در مقاله حاضر، برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی از یک نرم‌افزار حل‌کننده استفاده می‌شود. این نرم‌افزار با بهره‌گیری از روش نقطه درونی اولیه دوگان<sup>1</sup> می‌تواند مسائل بزرگ‌مقیاس برنامه‌ریزی غیرخطی را با دقت و سرعت بالایی حل نماید [22].

## 5- حل مسئله فرود نرم بر روی ماه با رویکرد ترکیبی

در بخش 2، مسئله کنترل بهینه فرود نرم بر روی ماه تعریف گردید. معادلات حالت این مسئله دربرگیرنده چهار متغیر حالت  $(\vec{x} = [r, \theta, u, v])$  و یک متغیر کنترل  $(\vec{u} = \beta)$  می‌باشند. اگر بنا باشد از رویکرد ترکیبی بیان‌شده در بخش 4 برای حل این مسئله استفاده شود، لازم است تا ابتدا بر مبنای همواری دیفرانسیلی، خروجی‌های هموار شناسایی شده و مسئله بر اساس خروجی‌های هموار و مشتقات زمانی آنها بازتعریف شود.

همان گونه که پیشتر اشاره شد، بهترین انتخاب برای خروجی‌های هموار، متغیرهای موقعیتی می‌باشند. در مسئله تعریف‌شده برای فرود نرم بر روی ماه، دو متغیر موقعیتی وجود دارند که عبارتند از: فاصله شعاعی ( $r$ ) و زاویه موقعیتی یا آنومالی واقعی ( $\theta$ ). بنابراین باید تلاش شود تا کل مسئله با همین دو متغیر و مشتقات زمانی آنها بیان شوند.

با توجه به معادلات (1) و (2)، می‌توان دو متغیر حالت دیگر (سرعت مماسی و سرعت شعاعی) را به صورت روابط (25,26) بدست آورد:

$$u = r\dot{\theta} \quad (25)$$

$$v = \dot{r} \quad (26)$$

برای بدست آوردن رابطه میان متغیر کنترل و خروجی‌های هموار، لازم است تا ابتدا مشتقات دو متغیر حالت فوق، با بهره‌گیری از روابط (25) و (26) محاسبه گردند:

$$\dot{u} = \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \quad (27)$$

$$\dot{v} = \ddot{r} \quad (28)$$

با جایگذاری معادلات (25) تا (28) در معادلات (3) و (4) و انتقال عبارات فاقد متغیر کنترل به سمت چپ معادلات مذکور، روابط (29,30) بدست می‌آیند:

$$\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + \frac{(r\dot{\theta})\dot{r}}{r} = \frac{T}{m} \cos \beta \quad (29)$$

$$\ddot{r} - \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} + \frac{\mu_M}{r^2} = \frac{T}{m} \sin \beta \quad (30)$$

در نهایت، با تقسیم معادلات (30) بر (29) می‌توان به رابطه میان متغیر کنترل و خروجی‌های هموار دست یافت:

<sup>1</sup> Primal-Dual Interior Point

متغیرها و قیود بهینه‌سازی می‌شود و به تبع آن، سرعت حل و همگرایی فرایند بهینه‌سازی افزایش قابل توجهی می‌یابد.

### 6- نتایج عددی بهینه‌سازی

در این بخش، نتایج عددی حاصل از حل مسئله کنترل بهینه فرود نرم بر روی ماه براساس راهبردهای مختلف فرود ارائه می‌شود. در جدول 1، مقادیر ثابت لازم برای حل عددی مسئله ارائه شده است. مقادیر جرم اولیه، نیروی تراست و ضربه ویژه سوخت بیان شده در این جدول، متعلق به یک وسیله فضایی هندی می‌باشد [1].

با مشخص شدن مقادیر ثابت، می‌توان فرایند حل مسئله کنترل بهینه را با رویکرد ترکیبی و بر اساس راهبردها و سناریوهای فرود بیان شده در بخش 3 به انجام رساند. در فرایند حل، برای تقریب هر یک از خروجی‌های هموار با منحنی بی‌اسپیلاین، از 10 منحنی بی‌زبه مرتبه 6 با سطح پیوستگی 5 استفاده می‌کنیم. تعداد نقاط کنترل هر کدام این منحنی‌های بی‌اسپیلاین براساس رابطه (22)، 15 عدد می‌باشد. بنابراین، مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی حاصله دارای 31 متغیر بهینه‌سازی خواهد بود. اگر تعداد نقاط هم‌نشانی 15 عدد در نظر گرفته شوند، مسئله دارای 22 قید بهینه‌سازی نیز خواهد بود که 15 عدد برای اعمال معادله دینامیکی باقیمانده و 7 عدد برای اعمال شرایط مرزی به کار گرفته می‌شود.

در راهبرد اول، وسیله از مدار استقرار 100 کیلومتری مستقیماً بر روی ماه فرود می‌آید. سرعت وسیله در مدار استقرار، با استفاده از رابطه (11) بدست می‌آید که برابر با 1691.97 m/s می‌باشد. این سرعت، سرعت مماسی اولیه وسیله در ابتدای فرایند فرود می‌باشد. با استفاده از این مقدار و شرایط مرزی تعریف شده در روابط (10) و (12)، می‌توان مسئله را حل نمود.

در راهبرد دوم، وسیله ابتدا از مدار استقرار 100 کیلومتری، یک کاهش مداری هاهمن به مداری واسط انجام می‌دهد و بعد بر روی ماه فرود می‌آید. با استفاده از رابطه (13) می‌توان سرعت ورود به مدار واسط را پس از مرحله کاهش مداری هاهمن بدست آورد. این سرعت، سرعت مماسی اولیه وسیله در ابتدای فرایند فرود می‌باشد. همچنین، با توجه به مصرف سوخت برای کاهش مداری، از رابطه (15) می‌توان جرم اولیه وسیله را در ابتدای فرایند فرود تعیین نمود. با استفاده از این مقادیر و شرایط مرزی تعریف شده در روابط (10) و (14)، می‌توان مسئله را حل نمود.

در جدول 2، نتایج عددی حاصل از حل مسئله بهینه‌سازی براساس راهبردهای اول و دوم ارائه گردیده‌اند. در شکل 2، مسیرها و کنترل بهینه بدست آمده برای مدار واسط 15 km (به عنوان نمونه) نشان داده شده‌اند. در راهبرد سوم، فرود نرم بر روی ماه در دو مرحله انجام می‌شود که در مرحله اول، ترمز افقی و در مرحله دوم، نزول عمودی صورت می‌پذیرد. در این

جدول 1 مقادیر ثابت

عنوان	مقدار ثابت (واحد)
شعاع متوسط ماه ( $R_M$ )	1737.1 km
ارتفاع مدار استقرار ماه ( $r_p - R_M$ )	100 km
پارامتر گرانشی استاندارد ماه ( $\mu_M$ )	4904.8695 km <sup>3</sup> /s <sup>2</sup>
جرم اولیه وسیله در مدار استقرار ( $M$ )	300 kg
نیروی تراست وسیله ( $T$ )	440 N
ضریب ویژه سوخت ( $I_{sp}$ )	310 s
شتاب جاذبه زمین ( $g_0$ )	9.807 m/s <sup>2</sup>

مطلوب پارامترهای منحنی‌های بی‌اسپیلاین را می‌توان پس از چندین بار حل مسئله، اصلاح و تنظیم نمود. همچنین، لازم نیست که پارامترهای منحنی‌های بی‌اسپیلاین خروجی‌های هموار با یکدیگر یکسان باشند.

در مسئله کنترل بهینه فرود نرم بر روی ماه، تعریف بردار گره به دلیل آزادبودن زمان نهایی قدری دشوار خواهد بود. آزادبودن زمان نهایی سبب تغییر مقاطع زمانی در بردار گره در طول بهینه‌سازی می‌شود که این امر، ناپایداری شدیدی در فرایند حل ایجاد کرده و همگرایی مسئله را دچار مشکل می‌نماید. راهکار رفع این مشکل، نرمال کردن بازه زمانی مسئله است. برای این کار، لازم است که بازه زمانی مسئله به محدوده [0,1] نگاشت گردد. اگر این محدوده در مقدار زمان نهایی مسئله ( $t_f$ ) ضرب شود، بازه زمانی اصلی مسئله بدست می‌آید. در این حالت، رابطه میان تغییرات زمان نرمال ( $\tau$ ) و زمان اصلی ( $t$ ) به صورت (34) خواهد بود:

$$t = t_f \tau \quad t \in [0, t_f], \tau \in [0, 1] \quad (34)$$

با توجه به این نرمال‌سازی زمان، باید تمامی مشتقات موجود در مسئله، به جای مشتق‌گیری برحسب زمان اصلی، برحسب زمان نرمال مشتق‌گیری شوند. بر این اساس، روابط میان خروجی‌های هموار و سایرمتغیرهای حالت و کنترل به صورت روابط (35-37) درمی‌آیند:

$$u = \frac{r\dot{\theta}}{t_f} \quad (35)$$

$$v = \frac{\dot{r}}{t_f} \quad (36)$$

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{\dot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu_M t_f^2}{r^2}}{2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}} \right) \quad (37)$$

همچنین، معادله باقیمانده به صورت رابطه (38) درمی‌آید:

$$\left( \frac{2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}}{t_f^2} \right)^2 + \left( \frac{\dot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu_M}{r^2}}{t_f^2} \right)^2 = \left( \frac{T}{m} \right)^2 \quad (38)$$

باید توجه داشت که مشتقات به کاررفته در معادلات (35) تا (38)، برحسب زمان نرمال می‌باشند. در این معادلات، زمان نهایی ( $t_f$ ) مجهول می‌باشد که باید مقدار بهینه آن در حین فرایند بهینه‌سازی بدست آید.

همان‌گونه که اشاره شد، در صورت استفاده از همواری دیفرانسیلی، باید تمامی مسئله کنترل بهینه براساس خروجی‌های هموار و مشتقات زمانی آنها بیان شود. در نتیجه، باید شرایط مرزی (اولیه و نهایی) مسئله نیز بر همین مبنا و با استفاده از روابط موجود بازتعریف گردند.

با بهره‌گیری از رویکرد ترکیبی برای حل مسئله کنترل بهینه فرود نرم بر روی ماه، به تعداد نقاط کنترل منحنی‌های بی‌اسپیلاین خروجی‌های هموار، متغیر بهینه‌سازی وجود خواهد داشت که متغیر زمان نهایی نیز به این مجموعه اضافه می‌شود. همچنین، با توجه به اعمال تنها یک معادله دینامیکی در نقاط هم‌نشانی، به تعداد نقاط هم‌نشانی، قید وجود خواهد داشت که قیود مرزی (شرایط اولیه و نهایی) نیز به این مجموعه اضافه می‌شوند. با توجه به آزاد بودن مقدار نهایی زاویه موقعیتی و مقید بودن سایر مقادیر اولیه و نهایی متغیرهای حالت، این مسئله دارای 7 قید مرزی خواهد بود.

اگر تعداد نقاط کنترل منحنی‌های بی‌اسپیلاین را  $N_{con}$  و تعداد نقاط هم‌نشانی را  $N_{col}$  در نظر بگیریم، برای مسئله موردنظر،  $(2N_{con} + 1)$  متغیر بهینه‌سازی و  $(N_{col} + 7)$  قید بهینه‌سازی خواهیم داشت. این در حالی است که اگر از همواری دیفرانسیلی برای حل مسئله استفاده نشود،  $(5N_{con} + 1)$  متغیر بهینه‌سازی و  $(4N_{col} + 7)$  قید بهینه‌سازی خواهند بود. همان‌گونه که مشخص است، استفاده از همواری دیفرانسیلی، سبب کاهش چشمگیر تعداد



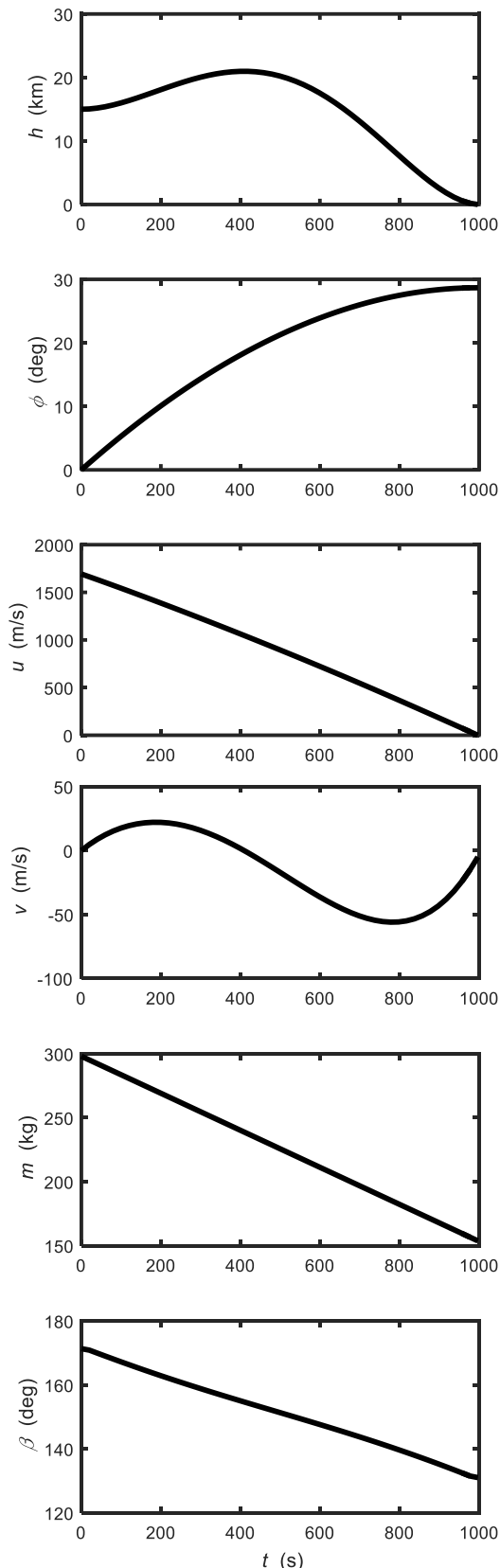


Fig. 2 Optimal trajectories and control for the 2nd strategy

شکل 2 مسیرها و کنترل بهینه برای راهبرد دوم

در نتایج عددی ارائه شده برای راهبرد سوم (جدول 3) مشاهده می شود که زمان بهینه فرود با تفکیک مراحل ترمز افقی و نزول عمودی، افزایش می یابد

حالت، مسئله کنترل بهینه نیز به دو زیرمسئله تبدیل خواهد شد که دارای ساختار یکسان و شرایط مرزی متفاوت هستند. در زیرمسئله اول، از شرایط اولیه (14) و شرایط نهایی (16) استفاده می شود، در حالی که در زیرمسئله دوم، از شرایط اولیه (16) و شرایط نهایی (10) استفاده می گردد. در هر دو زیرمسئله، زمان نهایی آزاد است.

در جدول 3، نتایج عددی حاصل از حل مسئله بهینه سازی براساس راهبرد سوم ارائه گردیده اند. اطلاعات این جدول برای مدار واسط 15 km و ارتفاعات مختلف آغاز نزول عمودی بیان گردیده است. در این جدول، مقدار بهینه بدست آمده برای سرعت شعاعی در انتهای مرحله ترمز افقی ( $v_{12}$ ) ارائه شده است. در شکل 3، مسیرها و کنترل بهینه بدست آمده برای ارتفاع آغاز نزول عمودی 2 km (به عنوان نمونه) نشان داده شده اند.

در سطر نخست جدول 2، نتایج راهبرد اول و در سطرهای بعدی، نتایج راهبرد دوم ارائه شده است. همان گونه که مشخص است، با بهره گیری از مدار واسط و کاهش مداری اولیه (انتقال هاهمن)، زمان کمینه فرود کاسته شده و جرم نهایی بیشینه افزایش می یابد. بنابراین، راهبرد دوم نسبت به راهبرد اول، منجر به مسیر بهینه تری می شود.

مطابق با اطلاعات جدول 2، با کاهش ارتفاع مدار واسط در راهبرد دوم، میزان جرم نهایی بیشینه افزایش می یابد. پس هرچه ارتفاع مدار واسط کمتر شود و به سمت صفر میل کند، بر جرم نهایی بیشینه افزوده می گردد. بنابراین، باید تا جایی که عوارض سطحی ماه و محدوده خطاهای هدایتی اجازه می دهد، ارتفاع مدار واسط را کاهش داد تا مسیر بهینه تری حاصل شود.

در نتایج حاصل از راهبردهای اول و دوم، یک مشکل اساسی وجود دارد و آن مقدار نهایی زاویه بردار تراست است. برای فرود نرم، جدای از صفر کردن تقریبی سرعت برخورد، باید به راستای وسیله در هنگام برخورد با سطح ماه نیز توجه نمود. محور طولی وسیله باید در لحظه برخورد، عمود بر سطح فرود باشد تا وسیله به درستی بر روی سطح ماه استقرار یابد. این محور طولی با راستای بردار تراست، هم جهت است. در انتهای فرود با راهبردهای اول و دوم، زاویه بردار تراست (محور طولی وسیله) در حدود 30 تا 45 درجه با زاویه 90 درجه مطلوب اختلاف دارد. پس این راهبردها، علیرغم بهینگی و کاهش مطلوب سرعت برخورد، قابلیت پیاده سازی عملی را ندارند.

جدول 2 نتایج عددی بهینه سازی برای راهبردهای اول و دوم

Table 2 Numerical results of optimization for the 1st and 2nd strategies

ارتفاع مدار واسط (km)	مدت زمان فرود (s)	جرم نهایی وسیله (kg)	زاویه نهایی بردار تراست (deg)
100	1036.458	149.932	122.853
50	1012.252	152.384	127.473
25	1001.326	153.395	130.186
20	999.288	153.575	130.757
15	997.303	153.747	131.337
10	995.371	153.911	131.927
5	993.586	154.053	133.528

جدول 3 نتایج عددی بهینه سازی برای راهبرد سوم

Table 3 Numerical results of optimization for the 3rd strategy

ارتفاع آغاز نزول عمودی (km)	سرعت شعاعی بهینه (m/s)	زمان ترمز افقی (s)	زمان نزول عمودی (s)	جرم نهایی وسیله (kg)
5	-109.201	959.520	83.436	147.140
4	-95.115	963.165	72.497	148.195
3	-81.685	967.450	61.752	149.130
2	-62.442	974.204	46.391	150.376
1	-39.145	983.827	27.584	151.705

سطح ماه نسبت به افق محلی، عمود می‌باشد که این اتفاق در نمودار کنترل بهینه شکل 3 به وضوح مشخص می‌باشد. در این راهبرد، بخش عمده‌ای از سرعت وسیله در مرحله ترمز افقی گرفته شده و در مرحله نزول عمودی، وسیله بدون تلاش کنترلی و تنها با تراسست ثابت و معکوس خود به صورت عمودی بر روی سطح ماه فرود می‌آید. در پایان مرحله ترمز افقی، زمان کافی برای سامانه کنترلی وجود دارد تا زاویه بردار تراسست را به 90 درجه تغییر دهد تا الزامات نزول عمودی برقرار گردد. بنابراین، راهبرد سوم قابلیت پیاده‌سازی بیشتری نسبت به راهبردهای اول و دوم دارد و مسیر بهینه کاربردی‌تری را پیشنهاد می‌دهد.

مطابق با جدول 3، هرچه ارتفاع آغاز نزول عمودی کمتر باشد، جرم نهایی وسیله بیشتر خواهد بود. این ارتفاع باید بگونه‌ای انتخاب شود که سامانه کنترلی زمان کافی برای عمود کردن محور طولی وسیله را داشته باشد. اگر به شکل مسیرهای بهینه تولیدی (شکل‌های 2 و 3) دقت شود، یک افزایش ارتفاع اولیه را می‌توان مشاهده کرد. افزایش ارتفاع در ابتدای فرود به وسیله کمک می‌کند تا سرعت خود را به نحو مؤثرتری کاهش دهد. راهکار حذف این افزایش ارتفاع در مسیرهای بهینه تولیدی این است که از یک تراسست ضربه‌ای معکوس در هنگام خروج از مدار واسط استفاده شود تا سرعت مماسی وسیله را در آغاز فرایند فرود به نحو چشمگیری کاهش دهد.

#### 7- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، سه راهبرد مختلف برای فرود نرم وسایل فضایی بر روی سطح ماه مورد توجه قرار گرفت و بر اساس آنها، مسیرهای بهینه فرود بدست آمد. برای این منظور، مسئله فرود در قالب یک مسئله کنترل بهینه تعریف و با استفاده از یک رویکرد ترکیبی جدید مبتنی بر همواری دیفرانسیلی حل گردید. در این رویکرد، با بهره‌گیری از مفهوم همواری دیفرانسیلی، مسئله با حداقل تعداد متغیرها و قیود بیان گردید و بخش عمده‌ای از معادلات حالت حذف شد. همچنین در این رویکرد، با بهره‌گیری از منحنی‌های بی‌اسپایلین، تقریب پیوسته‌ای از خروجی‌های هموار با متغیرهای گسسته بدست آمد و امکان بهره‌گیری از روش‌های برنامه‌ریزی غیرخطی برای حل مسئله فراهم شد. ویژگی ارزشمند رویکرد ترکیبی، حذف مشکلات عدیده روش‌های حل پیشین و دقت و سرعت بالای حل و همگرایی است. رویکرد به کار رفته در این مقاله سبب گردید تا امکان حل یکسان و همگون مسئله با راهبردهای مختلف فراهم شود تا بتوان آنها را در یک قالب مشابه قیاس نمود.

بر اساس نتایج عددی بدست آمده در این مقاله، فرود غیرمستقیم از مدار استقرار، منجر به جرم نهایی بیشینه‌تری می‌گردد. بنابراین، بهتر است تا وسیله فضایی با کاهش مداری هاهمن، خود را تا حد ممکن و مجاز به سطح ماه نزدیک کند و بعد، فرایند فرود نرم را آغاز نماید. همچنین، ملاحظه گردید که به منظور تأمین شرط عمود بودن محور طولی وسیله بر سطح فرود، بهتر است مراحل کاهش سرعت افقی و عمودی از هم تفکیک گردند. در این حالت، وسیله ابتدا مرحله ترمز افقی را تا صفر کردن سرعت مماسی تجربه می‌کند و پس از رسیدن به ارتفاعی مشخص، نزول عمودی را آغاز می‌نماید. مرحله نزول عمودی، به سامانه کنترلی وسیله این مجال را می‌دهد تا راستای محور طولی را به حالت عمود بر سطح فرود درآورد. بنابراین، با در نظر گرفتن جمیع ملاحظات، می‌توان مسیرهای مبتنی بر راهبرد سوم را به عنوان مسیرهای بهینه و کاربردی انتخاب نمود.

به منظور پیاده‌سازی مسیرهای بهینه تولیدی، باید از رویکردهای کنترلی مناسب جهت حذف نویزها و تحمل اغتشاشات و عدم قطعیت‌ها استفاده شود

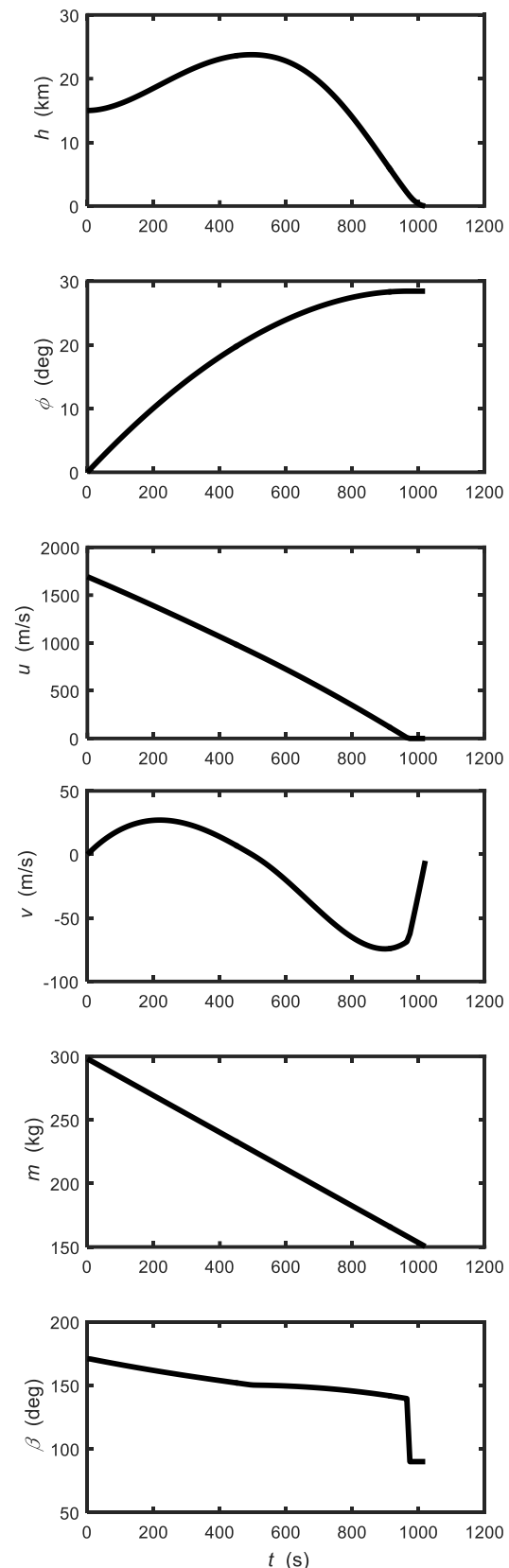


Fig. 3 Optimal trajectories and control for the 3rd strategy

شکل 3 مسیرها و کنترل بهینه برای راهبرد سوم

و در نتیجه، جرم بیشینه حاصله، نسبت به راهبردهای اول و دوم کمتر است. اما مزیت راهبرد سوم این است که محور طولی وسیله در هنگام برخورد با

تا وسیله فضایی بتواند منطبق بر این مسیرها، فرود نرمی را در کمترین زمان و با بیشترین جرم محموله داشته باشد.

#### 8- مراجع

- trajectory for manned lunar mission, *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 56, No. 3, pp. 113-120, 2013.
- [11] Q. Peng, *Finite-Thrust Trajectory Optimization Using a Combination of Gauss Pseudospectral Method and Genetic Algorithm*, R. Popa (ed.), *Genetic Algorithms in Applications*, Chapter 4, Rijeka: InTech, 2012.
- [12] X. Liu, G. Duan, Nonlinear optimal control for the soft landing of lunar lander, *Proceedings of the 1st International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics*, Harbin, China, pp. 1381-1387, 2006.
- [13] X. Liu, G. Duan, K. Teo, Optimal soft landing control for moon lander, *Automatica*, Vol. 44, No. 4, pp. 1097-1103, 2008.
- [14] H. H. Afshari, N. Rostamy, I. S. Nejad, A. B. Novinzadeh, Nonlinear optimal closed-loop guidance law for lunar landing mission using perturbation feedback control, *International Review of Physics*, Vol. 9, No. 1, pp. 22-29, 2015.
- [15] R. Jamilnia, *Development of an Online Combined Method for Trajectory Optimization*, PhD Thesis, Department of Aerospace Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, 2012. (in Persian فارسی)
- [16] O. VonStryk, *Numerical Solution of Optimal Control Problems by Direct Collocation*, R. Bulirsch, A. Miele, J. Stoer, K. H. Well (Eds.), *Optimal Control - Calculus of Variations*, pp. 129-143, Basel: Birkhauser, 1993.
- [17] J. T. Betts, Survey of numerical methods for trajectory optimization, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 2, pp. 193-207, 1998.
- [18] H. Seywald, Trajectory optimization based on differential inclusion, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 17, No. 3, pp. 480-487, 1994.
- [19] M. Fliess, J. Levine, P. Martin, P. Rouchon, Flatness and defect of nonlinear systems, *International Journal of Control*, Vol. 61, No. 6, pp. 1327-1361, 1995.
- [20] C. De Boor, *A Practical Guide to Splines*, pp. 131-170, New York: Springer-Verlag, 2001.
- [21] J. T. Betts, *Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming*, Second Edition, pp. 91-218, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2010.
- [22] A. Wächter, *An Interior Point Algorithm for Large Scale Nonlinear Optimization with Applications in Process Engineering*, PhD thesis, Carnegie Mellon University, Pennsylvania, 2002.
- [1] R. V. Ramanan, M. Lal, Analysis of optimal strategies for soft landing on the moon from lunar parking orbits, *Journal of Earth System Science*, Vol. 114, No. 6, pp. 807-813, 2005.
- [2] S. Haghghat, *Optimal Mission Design for a Lunar Lander*, MSc Thesis, Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, 2005. (in Persian فارسی)
- [3] D. H. Cho, B. Jeong, D. Lee, H. Bang, Optimal perilune altitude of lunar landing trajectory, *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 10, No. 1, pp. 67-74, 2009.
- [4] D. H. Cho, D. Kim, H. Leeghim, Optimal lunar landing trajectory design for hybrid engine, *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 462072, 2015.
- [5] S. Salehi, *Optimal Control of Soft Landing for a Lunar Module*, MSc Thesis, Faculty of Science, Shiraz University of Technology, Tehran, 2010. (in Persian فارسی)
- [6] B. Park, J. Ahn, M. Tahk, Two-dimensional trajectory optimization for soft lunar landing considering a landing site, *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 12, No. 3, pp. 288-295, 2011.
- [7] Y. Shan, G. Duan, Study on the optimal fuel consumption of the singularity condition for lunar soft landing, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, Sanya, China, pp. 930-935, 2007.
- [8] A. M. Hawkins, *Constrained Trajectory Optimization of a Soft Lunar Landing from a Parking Orbit*, MSc Thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, 2005.
- [9] D. H. Cho, H. Bang, H. D. Kim, Optimal trajectory design for the lunar vertical landing, *Proceedings of the 63rd International Astronautical Congress*, Naples, Italy, pp. 5662-5669, 2012.
- [10] Q. Peng, H. Li, H. Shen, G. Tang, Hybrid optimization of powered descent