



مدل سازی دولایه دیواره شریان با فرض ماده هایپر الاستیک

امین امیرخانی¹، علیرضا فتوحی^{2*}

1- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

* yezd@afotuhi@yazd.ac.ir, 89195-741

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 04 دی 1396

پذیرش: 09 بهمن 1396

ارائه در سایت: 02 اسفند 1396

کلید واژگان:

مدل سازی دیواره شریان

مکانیک محیط های پیوسته

معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی

روش درون یابی مشتق تعمیم یافته

چکیده

مدل سازی بافت های بیولوژیک نقش مهمی در درک رفتار بافت و توسعه مواد مصنوعی برای کاربردهای پزشکی ایفا می کند و یک گام اساسی در توسعه مدل های پیش بینی کننده برای کمک به تحقیقات در محدوده گسترده ای از کاربردها شامل کاربردهای پزشکی و مهندسی بافت است. توابع انرژی کرنشی مختلف تا به امروز برای مدل سازی شریان ها معرفی شده اند. تابع انرژی کرنشی نولان جدیدترین تابع انرژی کرنشی معرفی شده است. مدل سازی شریان به صورت دو لایه با استفاده از این تابع انرژی کرنشی تاکنون انجام نشده است. در این تحقیق مدل سازی دیواره شریان به صورت دولایه شامل لایه های مدیا و ادوانتیشا و با فرض هایپر الاستیک انجام شده است. ابتدا معادلات حاکم بر مسأله با استفاده از روابط محیط های پیوسته استخراج و شرایط مرزی شامل فشار داخلی شریان، نیروی محوری و ممان پیچشی تحت شرایط استاتیکی بر آن اعمال شده اند. مؤلفه های تنش کوشی با استفاده از روابط مکانیک محیط های پیوسته مشخص شدند و سپس معادلات تعادل در مختصات استوانه ای با استفاده از تنش های کوشی به دست آمده اند. معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی معادلات حاصل از این روند هستند که با استفاده از روش درون یابی مشتق تعمیم یافته حل شده اند و تغییرات تنش در دیواره شریان به دست آمده است. ابتدا مدل سازی شریان به صورت تک لایه شامل لایه مدیا انجام شده و نتایج مدل سازی با داده های تجربی مقایسه شده اند. مقایسه بین تنش ها در دیواره شریان با داده های تجربی نشان داد که تابع انرژی کرنشی نولان برای انجام مدل سازی مناسب است. سپس مدل سازی شریان به صورت دولایه شامل لایه های مدیا و ادوانتیشا انجام و تنش های ایجاد شده در دیواره شریان به دست آمده اند.

Two-layer artery wall modeling with hyperelastic material assumption

Amin Amirkhani, Ali Reza Fotuhi*

Department of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran.

* P.O.B. 89195-741 Yazd, Iran, afotuhi@yazd.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 25 December 2017
Accepted 29 January 2018
Available Online 21 February 2018

Keywords:

Artery wall modeling
Continuum mechanics
Nonlinear partial differential equations
Generalized differential quadrature method

ABSTRACT

Biologic tissues modeling play an important role in understanding the tissue behavior and development of synthetic materials for medical applications. It is also a vital action to develop the predictive models for a wide range of uses including medical and tissue engineering. Various strain energy functions have been introduced to model arteries to date. The newest introduced strain energy function is the Nolan strain energy function. Two-layer arterial modeling using this strain energy function has not been performed so far. In this paper, modeling the arteries was carried out in the form of double layers including media and adventitia and hyperelastic material assumption. At first, governing equations were driven based on continuum mechanics. Boundary conditions including inner pressure of artery, axial load and torque as well as static equilibrium were applied. Moreover, Cauchy stress components were gotten by using the continuum mechanics relations. Then, the equilibrium equations in cylindrical coordinate were obtained by using the Cauchy stress. Stress distribution through the artery wall was specified by solving the resulting nonlinear partial differential equations based on generalized differential quadrature method. In the beginning, the artery modeling was conducted in the form of monolayer including the media layer and the results were compared with experimental ones, comparison between stresses in the artery wall and experimental data showed that the volcanic energy function of Nolan is suitable for modeling. After that, the stress distribution was obtained by artery modeling in the form of double layers including the media and adventitia layers.

1- مقدمه

ماهیچه ها، شریان ها و مغز هستند. کلاژن بخش عمده ای از این بافت ها است. قسمت باقی مانده شامل الاستین، تیکولین و یک ژل هیدروفیل است که آن را ماده زمینه می گویند [2]. تمرکز بر بافت شناسی دیواره شریان متشکل از سه لایه مجزاست. لایه اینتیمای، لایه مدیا¹ و لایه ادوانتیشا، بخش اینتیمای

رفتار مکانیکی بافت های نرم بیولوژیک در چند سال اخیر مورد توجه ویژه مراجع علمی قرار گرفته است و این امر به ویژه از چشم انداز مکانیک محیط های پیوسته و به خصوص در مورد بافت دیواره شریان مورد توجه بیشتر است [1]. خصوصیات بافت نرم مختص بافت های پیوسته نظیر

¹ Intima

همکاران [10] یک فرمول هایپر الاستیک ناهمسانگرد جدید برای مدل سازی بافت نرم پیشنهاد کردند، زیرا در مدل تراکم پذیر هولز آپفل و همکاران قسمت ناهمسانگرد مدل از نامتغیرهای ناهمسانگرد هم حجم استفاده شده است؛ بنابراین نسبت به تغییر شکل های حجمی حساس نیست. به منظور مدل کردن درست رفتار ناهمسانگرد تراکم پذیر آن ها مدل MA^3 (مدل غیرایزوتروپ اصلاح شده) را ارائه کردند که جدیدترین مدل ارائه شده برای مدل سازی دیواره شریان است. پس از آن هم مدل سازی های زیادی برای شریان ها انجام شد، از جمله متحدی و همکاران در سال 2016 [11] به تحلیل خمش در دیواره دو لایه شریان با فرض پراکنندگی الیاف پرداختند که البته این مدل هم با فرض تراکم ناپذیری انجام شد. هر چند در تمامی مدل ها یاد شده برای شریان ها از تنش های برشی ناشی از حرکت سیال در داخل یا خارج از شریان صرف نظر شد، اما برای مدل سازی میکرو رگ ها باید توجه داشته باشیم که تغییرات تنش برشی در میکرو رگ ها با توجه به آسیب رساندن به لایه اندوتلیال و تغییر در نفوذپذیری و رسوب جرم در داخل میکرو رگ ها به عنوان عامل اصلی تشکیل پلاک چربی دارای اهمیت زیادی است و جزء فاکتورهای مهم در ایجاد بیماری های قلبی و عروقی محسوب می شود [12].

در این مقاله برای نخستین بار مدل سازی دیواره شریان به صورت دو لایه با استفاده از تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران [10] انجام می شود. دیواره شریان یک استوانه جدار ضخیم دولایه شامل لایه های مدیا و ادوانتیشا و به صورت ناهمسانگرد با تراکم پذیری خیلی کم در نظر گرفته می شود. مدل سازی با اعمال شرایط مرزی مناسب انجام می شود و توزیع تنش ها در دیواره شریان به دست می آیند.

2- معادلات حاکم

در این بخش معادلات کلی که توصیف پیوستگی، تغییر شکل ها و تنش های هایپر الاستیک ماده را فراهم می کنند، بیان می شود. به طور کلی شریان برای بررسی تغییر شکل ها به عنوان یک لوله جدار ضخیم استوانه ای در نظر گرفته می شود که تحت بارگذاری های مختلف قرار دارد [5]. برای بررسی تغییر شکل های شریان بر اساس روابط مکانیک محیط های پیوسته همان گونه که در شکل 1 مشخص است، مختصات اولیه با Ω_0 و مختصات تغییر شکل یافته با Ω نشان داده شده است. برای نشان دادن تغییر شکل ها از نمادگذاری $\chi: \Omega_0 \rightarrow R^3$ استفاده می شود که این تغییر شکل مختصات اولیه $X \in \Omega_0$ را به موقعیت $\chi(X) \in \Omega$ در مختصات تغییر شکل یافته Ω منتقل می کند. تبدیل χ هر نقطه از مختصات اولیه را به مختصات تغییر شکل یافته انتقال می دهد.

همان گونه که در شکل 2 مشخص است مختصات اولیه و تغییر شکل یافته در مختصات استوانه ای برای شریان مورد نظر به صورت رابطه (1) است.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_i \leq R \leq R_o \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi - \alpha \\ 0 \leq Z \leq H \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \chi: \Omega_0 \rightarrow R^3 \\ \chi = r\hat{e}_r + \theta\hat{e}_\theta + z\hat{e}_z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} r_i \leq r \leq r_o \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq h \end{array} \right\} \quad (1)$$

متغیرهای r و θ و z در مختصات تغییر شکل یافته بر اساس مقاله هولز آپفل و همکاران در سال 2000 [5] به صورت روابط (2-4) به دست می آیند [5].

$$\theta = k\theta + Z \frac{\Phi}{H} \quad (2)$$

که در رابطه (2) $k = 2\pi/2\pi - \alpha$ تعریف شده است و بیان کننده زاویه

درونی ترین لایه است. مدیا لایه میانی شریان ها و شامل یک شبکه پیچیده از الیاف کلاژن است. لایه ادوانتیشا خارجی ترین لایه شریان ها و عمدتاً از سلول های فیبرو پلاست و فیبروسیت تشکیل شده است. ماده زمینه بافتی و الیاف کلاژن منظم در دسته های ضخیم سازنده این لایه هستند. کلاژن به صورت قابل توجهی به قدرت و ثبات دیواره شریان کمک می کند. الیاف کلاژن لایه ادوانتیشا در شرایط بدون تنش به صورت موج دار (مجمع) در ماده زمینه نرم تعیبه شده اند که همین امر باعث کمتر شدن سفتی لایه ادوانتیشا در برابر لایه مدیا در شرایط بدون تنش می شود. شریان ها در طول حیات خود به بیماری هایی مختلفی مبتلا می شوند که شایع ترین آن ها بیماری آترواسکلروسیس است.

در مورد خواص مکانیکی شریان، آرایش منظم بسیار سازمان یافته ای از دو دسته الیاف کلاژن هلیکال باعث می شود تا دیواره شریان (و لایه های آن) ناهمسانگرد باشند. در اغلب مسائل از تنش ناشی از حرکت سیال در داخل یا خارج از دیواره شریان صرف نظر می شود. از این رو شریان را می توان به عنوان یک جامد همگن در نظر گرفت. به طور کلی یک شریان قرار گرفته در داخل بدن تحت پیش کرنش های محوری است. این امر به وسیله فاجز در سال 1900 [3] اولین بار در هنگام جراحی و برای برداشتن یک قسمت کوتاه از بدن گزارش شد. شریان در داخل بدن مشابه یک ماده پیش کشیده شده تحت فشار داخلی است و استفاده از یک تئوری لازم و ضروری است که نتیجه تغییر شکل های محدود را به واقعیت برساند. آزمایش های دینامیکی روی بافت شریان رفتار ویسکوالاستیک را نشان می دهد. شریان ها تحت بارگذاری متناوب مقاومت نشان می دهند و در شرایط تنش آرام تحت کشش ثابت و بارگذاری ثابت خزش نشان می دهند. هنگامی که بارگذاری روی دیواره شریان بیش از محدوده فیزیولوژیک باشد، و همان گونه که در فرآیندهای مکانیکی مانند آنژیوپلاستی رخ می دهند، مکانیزم های آسیب و شکست فعال می شوند. رفتار مکانیکی دیواره شریان یک رفتار ناهمسانگرد غیرخطی و تقریباً تراکم ناپذیر است. مدل سازی الیاف کلاژن بر اساس جهت گیری الیاف پراکنندگی جهت گیری های الیاف انجام می گیرد که اثر قابل توجهی روی پاسخ های مکانیکی بافت دارد. برای مدل سازی شریان ها یک ماده تقویت شده با الیاف و معمولاً به شکل یک استوانه سه لایه دارای خواص ناهمسانگرددی و تقریباً تراکم ناپذیر در نظر گرفته می شوند. فری در سال 1969 [4] اولین مطالعه در زمینه ناهمسانگرددی شریان را انجام داد. در سال 2000 یک مدل ساختاری برای توصیف پاسخ غیرفعال مکانیکی بافت شریان به وسیله هولز آپفل، گاسر و آگدن [5] ارائه شد. مدل ارائه شده در این مطالعه معماری دیواره شریان را به عنوان یک لوله جدار ضخیم دولایه شامل مدیا و ادوانتیشا در نظر گرفته است. در سال 2006 یک مدل سازی از لایه های شریان با در نظر گرفتن توزیع جهت گیری الیاف کلاژن به وسیله گاسر، آگدن و هولز آپفل [6] انجام شد. هدف از این مدل سازی توسعه یک چارچوب محیط پیوسته است که بتواند پراکنندگی جهت گیری الیاف کلاژن را به خوبی نشان بدهد. تجربه های گسترده نشان می دهد که بسیاری از مراقبت های بالینی مربوط به بافت های نرم می توانند در چارچوب مکانیک محیط های پیوسته مورد بررسی قرار گیرند. مثلاً بسته شدن شریان در سال 2002 به وسیله گاسر و همکاران [7] یا مسأله آنژیوپلاستی با بالون در سال 2002 به وسیله هولز آپفل [8] مورد بررسی قرار گرفت و پارگی آنوریسم به وسیله هامفری در سال 2000 [9] نمونه های خوبی از کاربردها در این زمینه است. در سال 2014 نولان و

¹ Media

² Adventitia

³ Modified anisotropic model

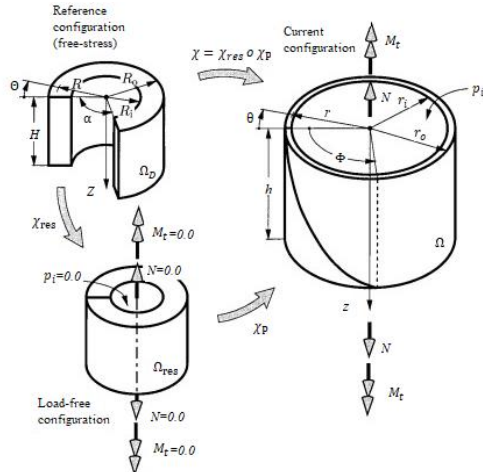


Fig. 2 Boundary conditions on the arteries [5]

شکل 2 شرایط مرزی روی شریان [5]

$$\gamma = r \frac{\Phi}{h} \quad (10)$$

تانسور گرادیان تغییر شکل $F(X) = \partial_\chi(X)/\partial(X)$ است و در مختصات استوانه‌ای به صورت رابطه (11) بیان می‌شود [13].

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial \theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ r \frac{\partial \theta}{\partial R} & \frac{r}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} & r \frac{\partial \theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad (11)$$

با انجام مشتقات مربوط به درایه‌های تانسور رابطه (11) گرادیان تغییر شکل در مختصات استوانه‌ای برای حالت سه‌بعدی به صورت رابطه (12) بیان می‌شود.

$$F = \lambda_r \hat{e}_r \otimes \hat{E}_R + \lambda_\theta \hat{e}_\theta \otimes \hat{E}_\theta + \gamma \lambda_z \hat{e}_\theta \otimes \hat{E}_Z + \lambda_z \hat{e}_z \otimes \hat{E}_Z \quad (12)$$

تانسور تغییر شکل گرین-کوشی راست در مختصات لاگرانژی $C = F^T F$ به صورت رابطه (13) بیان شده است.

$$C = \lambda_r^2 \hat{E}_R \otimes \hat{E}_R + \lambda_\theta^2 \hat{E}_\theta \otimes \hat{E}_\theta + \gamma \lambda_z \lambda_\theta (\hat{E}_\theta \otimes \hat{E}_Z + \hat{E}_Z \otimes \hat{E}_\theta) + \lambda_z^2 (1 + \gamma^2) \hat{E}_Z \otimes \hat{E}_Z \quad (13)$$

و تانسور کوشی چپ هم از گرادیان تغییر شکل براساس رابطه $B = FF^T$ به صورت رابطه (14) بیان شده است.

$$B = \lambda_r^2 \hat{e}_r \otimes \hat{e}_r + (\lambda_\theta^2 + \gamma^2 \lambda_z^2) \hat{e}_\theta \otimes \hat{e}_\theta + \gamma \lambda_z^2 (\hat{e}_\theta \otimes \hat{e}_z + \hat{e}_z \otimes \hat{e}_\theta) + \lambda_z^2 \hat{e}_z \otimes \hat{e}_z \quad (14)$$

از تانسورهای کوشی به دست آمده و درایه برشی که در تانسور دیده می‌شود مشخص است که تغییر شکل‌های ماده تغییر شکل‌های اصلی نیستند. به عبارت دیگر درایه‌های تانسور کوشی مستقل خطی نیستند و این مسأله ادامه روابط و حل معادلات نهایی حاکم بر مسأله را با مشکل مواجه خواهد کرد. برای رفع این مشکل باید تانسور کوشی حول یک محور دوران داده شود تا درایه‌های غیراصولی تانسور کوشی صفر شوند و در واقع تغییر شکل‌های اصلی به دست آیند. برای این کار کشش‌های محوری اصلی رابطه (15) در نظر گرفته شده است.

$$\lambda_i, i = \{1, 2, 3\} \quad (15)$$

تانسور کوشی حول محور r دوران داده شده و بنابراین بردارهای یکه رابطه (16) برای دوران در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= \hat{e}_r, \\ V^{(2)} &= \cos\psi \hat{e}_\theta + \sin\psi \hat{e}_z, \\ V^{(3)} &= -\sin\psi \hat{e}_\theta + \cos\psi \hat{e}_z \end{aligned} \quad (16)$$

بازشدگی مناسب لوله در مختصات بدون تنش (مختصات اولیه) است، α زاویه قطاع بازشدگی و θ مختصه دوم دستگاه مختصات استوانه‌ای در مختصات اولین، θ مختصه دوم در دستگاه اولیه، Φ زاویه پیچش استوانه ناشی از پیچ‌خوردگی و Z مختصه سوم دستگاه مختصات استوانه‌ای برای حالت اولیه، $0 \leq Z \leq H$ به صورت رابطه (3) است.

$$z = \lambda_z Z \quad (3)$$

که در رابطه (3) کشش محوری در جهت محور Z است.

برای بیان تغییر حجم می‌توان برای دو استوانه اولیه و تغییر شکل یافته رابطه (4) را نوشت.

$$J = \frac{dv}{dV} = \frac{2\pi(r^2 - r_i^2)z}{(2\pi - \alpha)(R^2 - R_i^2)Z} \quad (4)$$

رابطه مناسب برای به دست آوردن شعاع شریان در مختصات تغییر شکل یافته به صورت رابطه (5) بیان می‌شود.

$$\gamma = \sqrt{\frac{J}{k\lambda_z} (R^2 - R_i^2) + r_i^2} \quad (5)$$

بنابراین χ به صورت رابطه (6) خواهد بود.

$$\begin{aligned} \chi = & \left(\frac{J}{k\lambda_z} (R^2 - R_i^2) + r_i^2 \right) \hat{e}_r + (k\theta + Z \frac{\Phi}{H}) \hat{e}_\theta \\ & + (\lambda_z Z) \hat{e}_z \end{aligned} \quad (6)$$

2-1- کشش‌های محوری در مختصات استوانه‌ای

به طور کلی کشش محوری از رابطه $\lambda = dl^*/dl$ به دست می‌آید. در اینجا کشش محوری در راستای جهت‌های (r, θ, z) به وسیله رابطه‌های (7-9) بیان شده‌اند.

$$\lambda_r = \frac{\partial r}{\partial R} = \frac{JR}{rk\lambda_z} \quad (7)$$

$$\lambda_\theta = \frac{r \frac{\partial \theta}{\partial R}}{R \frac{\partial \theta}{\partial \theta}} = \frac{rk}{R} \quad (8)$$

$$\lambda_z = \frac{z}{Z} \quad (9)$$

زاویه پیچش هم برای توصیف تمامی تغییر شکل‌های ممکن در لوله استوانه‌ای باید تعریف گردد. این زاویه براساس رابطه (10) بیان شده است [5].

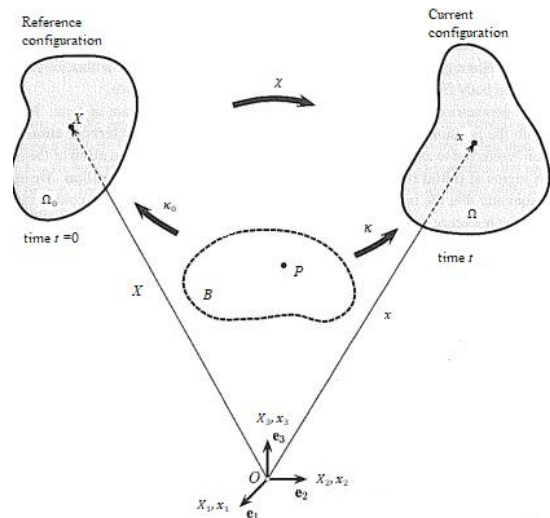


Fig. 1 deformation of initial coordinates to deformed coordinates [13]
شکل 1 تغییر شکل از مختصات اولیه به مختصات تغییر شکل یافته [13]

$$W = \frac{\xi}{2\rho_0} \exp(Q)$$

$$Q = b_1 E_\theta^2 + b_2 E_z^2 + b_3 E_r^2 + 2b_4 E_\theta E_z + 2b_5 E_z E_r + 2b_6 E_r E_\theta \quad (26)$$

در رابطه (26) b_i ($i = 1, 2, \dots, 6$)ها و ξ ثابت‌های ماده، E_r, E_θ, E_z درایه‌های کرنش گرین در مختصات لاگرانژی استوانه‌ای و ρ_0 چگالی ماده سازنده شریان است. W تابع انرژی کرنشی واحد در مختصات اولیه (لاگرانژی) را نشان می‌دهد. کلی‌ترین تابع انرژی کرنشی از نوع چانگ به وسیله هامفری و همکاران در سال 1999 فرموله شد [17].

تابع انرژی کرنشی معرفی شده به وسیله هولزآپفل و همکاران در سال 2000 [5] پایه بسیاری از مدل‌سازی‌های انجام شده پس از سال 2000 بوده است. این فرم از تابع انرژی کرنشی برای هر دویله‌ی مدیا و ادوانتیشا دارای اعتبار است. این تابع شامل دو قسمت هم‌سانگرد و ناهمسانگرد است، که این دو قسمت به صورت کامل از یکدیگر جدا هستند (رابطه (27)).

$$\bar{\Psi}(\bar{C}, a_{01}, a_{02}) = \bar{\Psi}_{\text{iso}}(\bar{C}) + \bar{\Psi}_{\text{aniso}}(\bar{C}, a_{01}, a_{02}) \quad (27)$$

مدل اصلی هولزآپفل برای مواد تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته شده است. با این حال یک نوع از این تابع انرژی کرنشی وجود دارد که در آن از مدول بالک استفاده شده است؛ بنابراین درجهایی که نمی‌توان از فرض تراکم‌ناپذیری استفاده کرد و یا این‌که قصد استفاده از فرض تراکم‌پذیری کم وجود دارد می‌توان این تابع را به کار برد و تابع انرژی کرنشی در این مدل به صورت رابطه (28) ارائه شده است.

$$\bar{\Psi}(\bar{C}, a_{01}, a_{02}) = \Psi_{\text{vol}}(J) + \bar{\Psi}_{\text{iso}}(\bar{C}) + \bar{\Psi}_{\text{aniso}}(\bar{C}, a_{01}, a_{02}) \quad (28)$$

در معادله بالا $\bar{\Psi}_{\text{iso}}$ و $\bar{\Psi}_{\text{aniso}}$ به ترتیب قسمت‌های هم‌سانگرد هم‌حجم و ناهمسانگرد هم‌حجم انرژی کرنشی آزاد، $\bar{C} = J^{-2/3}C$ مزدوج تانسور تغییر شکل کوشی هم‌حجم است.

نولان و همکاران در سال 2014 [10] با مدل‌سازی شریان با استفاده از تابع انرژی کرنشی تراکم‌پذیر هولزآپفل و همکاران نتیجه گرفتند که تابع فوق تغییر شکل‌ها را برای شریان در حالت تراکم‌پذیر و ناهمسانگرد به خوبی مدل نمی‌کند. آن‌ها همچنین تابع موردنظر خودشان را برای جایگزینی با تابع تراکم‌پذیر هولزآپفل و همکاران معرفی کردند که آن را تابع غیرایزوتروپ اصلاح شده می‌گویند. به موجب این اصلاح تابع انرژی کرنشی ناهمسانگرد یک تابع تماماً تشکیل شده از تانسور مرتبه دوم تغییر شکل کوشی C به جای قسمت هم‌حجم خودش \bar{C} به صورت رابطه (29) است.

$$\Psi(J, C, a_{04}, a_{06}) = \Psi_{\text{vol}}(J) + \Psi_{\text{iso}}(J, C) + \Psi_{\text{aniso}}(C, a_{04}, a_{06}) \quad (29)$$

که روابط (30-32) از رابطه (28) داریم.

$$\Psi_{\text{vol}}(J) = \frac{1}{2} k_0 (J - 1)^2 \quad (30)$$

$$\bar{\Psi}_{\text{iso}}(\bar{C}) = \frac{1}{2} \mu_0 (\bar{I}_1 - 3) \quad (31)$$

$$\Psi_{\text{aniso}}(C, a_{04}, a_{06}) = \frac{K_1}{2K_2} \sum_{i=4,6} \{\exp[K_2(I_i - 1)^2] - 1\} \quad (32)$$

تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران جدیدترین تابع انرژی کرنشی معرفی شده است که با برطرف کردن عیوب تابع انرژی کرنشی تراکم‌پذیر هولزآپفل و همکاران برای مدل‌سازی شریان به کار می‌رود. در این مقاله از تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران [10] برای مدل‌سازی شریان استفاده شده است.

2-3- محاسبه تنش‌ها از تابع انرژی کرنشی

با در اختیار داشتن تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران از معادله شناخته شده رابطه (33) برای به دست آوردن تنش نوع دوم پیولا-کیرششف استفاده شده

تانسور کوشی چپ برای کشش‌های اصلی از رابطه (17) به دست می‌آید.

$$B = \lambda_1^2 V^{(1)} \otimes V^{(1)} + \lambda_2^2 V^{(2)} \otimes V^{(2)} + \lambda_3^2 V^{(3)} \otimes V^{(3)} \quad (17)$$

می‌دانیم که شرط برابری دو تانسور این است که درایه‌های متناظر آن‌ها با یکدیگر برابر باشند؛ بنابراین معادلات (17,14) با توجه به رابطه (15) مربوط به تانسور کوشی چپ با یکدیگر برابر قرار داده می‌شوند. در نتیجه روابط (18-21) به دست می‌آیند.

$$\lambda_r = \lambda_1 \quad (18)$$

$$\lambda_\theta^2 + \gamma^2 \lambda_z^2 = \lambda_2^2 \cos^2 \psi + \lambda_3^2 \sin^2 \psi \quad (19)$$

$$\gamma \lambda_z^2 = \lambda_2^2 \sin \psi \cos \psi - \lambda_3^2 \sin \psi \cos \psi \quad (20)$$

$$\lambda_z^2 = \lambda_2^2 \sin^2 \psi + \lambda_3^2 \cos^2 \psi \quad (21)$$

که نتیجه به صورت روابط (22,23) به دست می‌آید.

$$\lambda_\theta = \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_z} \quad (22)$$

$$\psi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\gamma(\lambda_z)^2}{(\lambda_\theta)^2 - (\lambda_z)^2 + \gamma^2 - 1}\right) \quad (23)$$

2-2- تابع انرژی کرنشی مناسب برای مدل‌سازی دیواره شریان

در مطالعات گذشته توابع انرژی کرنشی زیادی برای توصیف پاسخ مکانیکی دیواره شریان‌ها پیشنهاد شده و از آن‌ها برای مدل‌سازی و بررسی رفتار مکانیکی دیواره شریان‌ها استفاده شده است. بسیاری از مدل‌سازی‌ها در گذشته براساس مدل‌سازی لوله جدار نازک بوده که به هیچ وجه دارای پاسخ تنش-کرنش مناسب برای دیواره شریان‌ها نیست. بعضی توابع انرژی کرنشی با فرض هم‌سانگردی در نظر گرفته شده و مدل‌سازی‌ها براساس مدل‌سازی دیواره جدار ضخیم هم‌سانگرد و تراکم‌ناپذیر انجام شده است که این روش به پاسخ مکانیکی شریان نزدیک‌تر است، اما با توجه به ناهمسانگردی دیواره شریان به دلیل وجود الیاف کلاژن و نقش مهم و حیاتی آن‌ها در تحمل بارهای وارده از دقت لازم برخوردار نیست. مطالعات جدید و معتبرتر با فرض‌های ناهمسانگردی و تراکم‌ناپذیری ارائه شدند که به پاسخ مکانیکی شریان نزدیک‌تر هستند.

هوپمن و همکاران در سال 1970 [14] تابع انرژی کرنشی که برای بیان معادلات ساختاری حاکم بر رفتار مکانیکی دیواره شریان است را به صورت تابع چندجمله‌ای رابطه (24) در نظر گرفتند.

$$W = w(I_1 - 3, I_2 - 3, I_3 - 1) \quad (24)$$

I_1, I_2 و I_3 نامتغیرهای کرنش الاستیک غیرخطی هستند و این تابع انرژی فقط تابعی از I_1, I_2 و I_3 است.

در سال 1979 کاسیانو و همکاران [15] از تابع انرژی کرنشی به صورت ترکیبی از توابع چندجمله‌ای و نمایی به صورت رابطه (25) استفاده کردند.

$$W = \alpha_1 [\exp(\alpha_2 e_{11}^2 + \alpha_3 e_{11} e_{22} + \alpha_4 e_{22}^2 + \alpha_5 e_{11}^2 e_{22} + \alpha_6 e_{11} e_{22}^2) - 1] + [\alpha_7 e_{22} \exp(\alpha_8 e_{ee}) + \alpha_9 e_{11} + \alpha_{10}] e_{12}^2 \quad (25)$$

e_{ij} ($i, j = 1, 2$) و α_i ($i = 1, 2, \dots, 10$) ثابت‌های الاستیک ماده

درایه‌های تانسور تغییر شکل هستند. این تابع انرژی کرنشی با فرض هم‌سانگردی ارائه شده است.

تابع انرژی کرنشی ارائه شده به وسیله چانگ و فانگ در سال 1983 [16] را شاید بتوان یکی از پرکاربردترین توابع انرژی کرنشی برای مدل‌سازی دیواره شریان‌ها دانست. اهمیت این تابع انرژی از آن جهت است که این مدل هر دو ویژگی‌های ناهمسانگردی و غیرخطی بودن را برای مدل‌سازی‌ها در نظر گرفته است. تابع انرژی کرنشی در مدل چانگ به صورت نمایی و در رابطه (26) نشان داده شده است.

$$\sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z} = \mu_0 J^{-5/3} [(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \sin\psi \cos\psi + 2J^{-1} K_1 [L(a_4 \otimes a_4)_{23} + N(a_6 \otimes a_6)_{23}]] \quad (45)$$

در رابطه‌های (45-43)، L و N به وسیله روابط (47،46) بیان می‌شوند [5].

$$L = (I_4 - 1) \exp\{K_2(I_4 - 1)^2 - 1\} \quad (46)$$

$$N = (I_6 - 1) \exp\{K_2(I_6 - 1)^2 - 1\} \quad (47)$$

4-2- معادلات تعادل و شرایط مرزی

معادلات حاکم بر مسأله همان معادلات تعادل در مختصات استوانه‌ای هستند. این معادلات برای مختصات استوانه‌ای به صورت روابط (48) بیان می‌شوند [13].

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + f_r = 0 \quad (48-a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + f_\theta = 0 \quad (48-b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \quad (48-c)$$

با توجه به این که در مسأله نیروهای جسمی وجود ندارد می‌توان رابطه (49) را نوشت.

$$f_r = f_\theta = f_z = 0 \quad (49)$$

با جای‌گذاری این مقادیر در معادلات تعادل اولیه و با در نظر گرفتن ویژگی تقارن محوری مسأله ($\partial/\partial\theta = 0$)، معادلات تعادل برای مسأله مورد بررسی در این مقاله به صورت روابط (50) بیان می‌شوند.

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (50-a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} = 0 \quad (50-b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (50-c)$$

5-2- شرایط مرزی

از شکل معادلات تعادل پیداست به این معادلات، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی هستند.

روی مرز دیواره خارجی تنش در جهت r صفر است. این شرط مرزی به صورت رابطه (51) اعمال می‌گردد [5].

$$\sigma_{rr}(r = r_0) = 0 \quad (51)$$

در مرز داخلی شریان مقدار تنش σ_{rr} ، برابر و خلاف جهت فشار موجود در شریان به صورت رابطه (52) است [5].

$$p_i = -\sigma_{rr}(r = r_i) = \int_{r_i}^{r_0} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) \frac{dr}{r} \quad (52)$$

شرط مرزی روی z در واقع به وسیله یک شرط ضعیف بیان می‌شود که در این شرط با انتگرال‌گیری، نیروی محوری وارد به شریان براساس معادله (53) به دست می‌آید [5].

$$P = 2\pi \int_{r_i}^{r_0} \sigma_{\theta\theta} r dr \quad (53)$$

برای حل عددی نیروی کاهش‌یافته محوری رابطه (54) مشخص شده است [5] و محاسبات براساس آن انجام می‌گیرد.

$$F = P - \pi r_i^2 p_i \quad (54)$$

یکی از تغییر شکل‌های احتمالی برای شریان پیچش است و شرط مرزی پیچش هم برای شریان در نظر گرفته می‌شود. که به صورت رابطه (55) بیان شده است [5].

$$M_t = \int_{r_i}^{r_0} \sigma_{\theta z} r^2 dr \quad (55)$$

$$S = 2 \frac{\partial \Psi(C)}{\partial C} F^T \quad (33)$$

با استفاده از تنش نوع دوم پیولا - کیرشهف رابطه (33) با استفاده از رابطه (34) تنش کوشی در مختصات اولیرین به دست می‌آید [13].

$$\sigma = J^{-1} F S F^T \quad (34)$$

رابطه (35) تنش کوشی حاصل از تابع انرژی کرنشی رابطه (29) را نشان می‌دهد.

$$\sigma = k_0(J - 1)I + \mu_0 \left[B - \frac{1}{3} I_1 I \right] + 2J^{-1} K_1 \sum_{i=4,6} (I_i - 1) \exp\{[K_2(I_i - 1)^2 - 1]\} (a_i \otimes a_i) \quad (35)$$

در رابطه (35) k_0 مدول بالک ایزوتروپیک، μ_0 مدول برشی ایزوتروپیک، K_1 و K_2 ثابت‌های غیرایزوتروپیک ماده و بردارهای $a_i = F a_{0i}$ ($i = 4, 6$) جهت‌های الیاف در مختصات اولیرین هستند.

نامتغیر اول از رابطه $I_1(C) = I_1(B) = \text{trac}(C)$ به دست می‌آید، بنابراین رابطه (36) به صورت زیر است.

$$I_1(C) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (36)$$

و نامتغیرهای I_4 و I_6 مربوط به جهت الیاف کلاژن در دیواره شریان هستند. مدل شریان به صورت یک استوانه جدار ضخیم در نظر گرفته می‌شود که دودسته الیاف کلاژن هلیکال در ماده زمینه آن جاسازی شده‌اند و جهت این الیاف عمود بر یکدیگر است. بردار هادی‌های روابط (37) جهت الیاف در مختصات اولیه هستند [5].

$$a_{04} = [0 \quad \cos\beta \quad \sin\beta] \quad (37-a)$$

$$a_{06} = [0 \quad \cos\beta \quad -\sin\beta] \quad (37-b)$$

نامتغیرهای چهارم و ششم وابسته به جهت الیاف کلاژن هستند و از رابطه‌های (38،39) به دست می‌آیند:

$$I_4 = a_{04} \cdot C a_{04} = C_{22} \cos^2\beta + 2C_{23} \sin\beta \cos\beta + C_{33} \sin^2\beta \quad (38)$$

$$I_6 = a_{06} \cdot C a_{06} = C_{22} \cos^2\beta - 2C_{23} \sin\beta \cos\beta + C_{33} \sin^2\beta \quad (39)$$

که C_{ij} ها $i, j = 1, 2, 3$ در روابط (40) بیان شده‌اند.

$$C_{11} = \lambda_r^2 = \lambda_\theta^2 \quad (40-a)$$

$$C_{22} = \lambda_\theta^2 = \left(\frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_z}\right)^2 \quad (40-b)$$

$$C_{23} = C_{32} = r \frac{\Phi \lambda_2 \lambda_3}{h} \quad (40-c)$$

$$C_{33} = \lambda_z^2(1 + \gamma^2) = \lambda_z^2 \left(1 + \left(r \frac{\Phi}{h}\right)^2\right) \quad (40-d)$$

β زاویه جهت الیاف است. مؤلفه‌های تنش کوشی حاصل از رابطه‌های (41-45) به دست می‌آیند.

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = 0 \quad (41)$$

$$\sigma_{rr} = k_0(J - 1) + \frac{1}{3}(2\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) \quad (42)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = k_0(J - 1) + \mu_0 J^{-5/3} \left(\lambda_2^2 \cos^2\psi + \lambda_3^2 \sin^2\psi - \frac{1}{3} \lambda_1^2 - \frac{1}{3} \lambda_2^2 - \frac{1}{3} \lambda_3^2 \right) + 2J^{-1} K_1 [L(a_4 \otimes a_4)_{22} + N(a_6 \otimes a_6)_{22}] \quad (43)$$

$$\sigma_{zz} = k_0(J - 1) + \mu_0 J^{-5/3} \left[\lambda_2^2 \sin^2\psi + \lambda_3^2 \cos^2\psi - \frac{1}{3} \lambda_1^2 - \frac{1}{3} \lambda_2^2 - \frac{1}{3} \lambda_3^2 \right] + 2J^{-1} K_1 [L(a_4 \otimes a_4)_{33} + N(a_6 \otimes a_6)_{33}] \quad (44)$$

شرایط مرزی پیوستگی برای ترکش‌ها در جهت شعاعی در مرز مشترک دولایه هم برقرار و به صورت رابطه (62) اعمال شده است.

$$\sigma_{rr(M)}(r = r_{o(M)}) = \sigma_{rr(A)}(r = r_{i(M)}) \quad (62)$$

در نهایت شرایط تعادل استاتیکی برای شریان اعمال و با حل معادلات و شرایط مرزی بالا با استفاده از روش‌های عددی مناسب پاسخ برای حالت دولایه به دست خواهد آمد.

3- روش حل عددی

در مدل سازی مکانیکی دیواره شریان معادلات تعادل حاکم هستند. با اعمال این معادلات بر تنش‌های کوشی به دست آمده یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول غیرخطی حاصل می‌گردد که این معادلات باید با استفاده از شرایط مرزی مناسب و با یک روش مناسب عددی حل شوند. با جای گذاری مؤلفه‌های تنش کوشی در معادلات تعادل و با توجه به این که در مؤلفه‌های تنش فقط سه مجهول $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ وجود دارند و این که مسأله به صورت دوبعدی در جهت‌های r, z مورد بررسی قرار می‌گیرد، مشتقات جزئی $\partial \lambda_1 / \partial r, \partial \lambda_2 / \partial r, \partial \lambda_3 / \partial r$ در جهت r و مشتقات جزئی $\partial \lambda_1 / \partial z, \partial \lambda_2 / \partial z, \partial \lambda_3 / \partial z$ در جهت z در معادلات به وجود می‌آیند. معادلات حاصل با روش‌های تحلیلی قابل حل نیستند؛ بنابراین باید با روش‌های تقریبی عددی حل شوند. در اغلب موارد حل‌های تقریبی به صورت به دست آوردن مقادیر تابع‌ها در نقاط گره کاملاً مشخص بیان می‌شود. در این مرحله یکی از پرسش‌های مهم و احتمالی رابطه بین مشتقات جزئی در معادلات دیفرانسیل و مقدار تابع‌ها در نقاط گره است. پلی که این دو را به هم وصل می‌کند عبارت از تکنیک‌های گسسته سازی عددی است. این تکنیک‌ها متناسب با راه حل تقریبی است و حل عددی به روش گسسته سازی نامیده می‌شود. راه حل‌های گسسته سازی متعددی برای حل این معادلات وجود دارند. در این میان روش‌های تفاضل محدود¹ (FD)، المان محدود² (FE) و حجم محدود³ (FV) در گروه روش‌های حل مرتبه پایین قرار می‌گیرند.

3-1 روش درون یابی مشتق تعمیم یافته⁴

در جستجوی یک روش گسسته سازی کارآمد برای به دست آوردن حل عددی با تعداد گره‌های کم، بلمن و همکاران در سال 1971 روش دیفرانسیل کوادراچ⁵ را معرفی کردند [18]. در بسیاری از مسائل حجم محاسبات با استفاده از روش دیفرانسیل کوادراچ معرفی شده به وسیله بلمن و همکاران کاهش پیدا می‌کند. در این روش مشتقات جزئی به صورت مجموع حاصل ضرب مقادیر یک تابع چند جمله‌ای در ضرایب وزنی همان نقاط تقریب زده می‌شود. به طور خلاصه زمانی که مشتقات جزئی با تقریب‌های مشتق تعمیم یافته جایگزین شوند، معادله دیفرانسیل جزئی به یک دستگاه معادلات جبری برای مسائل مستقل از زمان و یک سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی برای مسائل مقدار اولیه و یا مسائل مقدار مرزی وابسته به زمان تبدیل می‌شود. در همه موارد روش‌های عددی مناسب برای حل این دستگاه‌های معادلات حاصل به خوبی توسعه داده شده‌اند.

3-2 گسسته سازی معادلات

اگر N گره در جهت r و M گره در جهت z در سطح مورد نظر در نظر گرفته

با در نظر گرفتن شرایط مرزی یاد شده شرایط تعادل استاتیکی برای شریان اعمال می‌گردد. با حل معادلات و شرایط مرزی با استفاده از روش‌های عددی مناسب پاسخ تنش‌ها برای حالت یک لایه به دست خواهد آمد.

2-6 تحلیل شریان با فرض دو لایه

توابع انرژی کرنشی مورد استفاده برای حالت دولایه مشابه تابع انرژی کرنشی حالت یک لایه هستند، اما با ثابت‌های متفاوت برای هر کدام از لایه‌ها به صورت روابط (56) بیان شده‌اند [5].

$$\Psi_M = \frac{1}{2} k_{0M} (J - 1)^2 + \frac{1}{2} \mu_{0M} (\bar{I}_{1M} - 3) + \frac{K_{1M}}{2K_{2M}} \sum_{i=4,6} \{ \exp[K_{2M}(I_{iM} - 1)^2] - 1 \} \quad (56-a)$$

$$\Psi_A = \frac{1}{2} k_{0A} (J - 1)^2 + \frac{1}{2} \mu_{0A} (\bar{I}_{1A} - 3) + \frac{K_{1A}}{2K_{2A}} \sum_{i=4,6} \{ \exp[K_{2A}(I_{iA} - 1)^2] - 1 \} \quad (56-b)$$

در توابع انرژی کرنشی معادلات (56) برای دو لایه شش پارامتر برای مواد تشکیل دهنده شریان وجود دارد که k_{0M}, K_{1M}, K_{2M} برای لایه مدیا و k_{0A}, K_{1A}, K_{2A} برای لایه ادوانتیشا هستند.

2-7 شرایط مرزی دو لایه

تنش‌های شعاعی در دیواره خارجی لایه ادوانتیشا صفر است. این شرط مرزی به صورت معادله (57) اعمال می‌گردد.

$$\sigma_{rr(A)}(r = r_{o(A)}) = 0 \quad (57)$$

اما در مرز داخلی شریان مقدار تنش در جهت شعاعی یا همان σ_{rr} برابر و در خلاف جهت فشار موجود در شریان است. این شرط مرزی به صورت ضعیف و به شکل معادله (58) اعمال می‌گردد.

$$p_i = -\sigma_{rr(M)}(r_{i(M)}) = - \left[\int_{r_{i(M)}}^{r_{o(M)}} (\sigma_{rr(M)} - \sigma_{\theta\theta(M)}) \frac{dr(M)}{r(M)} + \int_{r_{i(A)}}^{r_{o(A)}} (\sigma_{rr(A)} - \sigma_{\theta\theta(A)}) \frac{dr(A)}{r(A)} \right] \quad (58)$$

شرط مرزی نیرویی روی z در واقع به وسیله یک شرط ضعیف حاصل می‌شود که در این شرط با انتگرال گیری روی دو لایه نیروی محوری وارد به شریان از رابطه (59) به دست می‌آید.

$$P = 2\pi \int_{r_{i(M)}}^{r_{o(M)}} \sigma_{zz(M)} r(M) dr(M) + \int_{r_{i(A)}}^{r_{o(A)}} \sigma_{zz(A)} r(A) dr(A) \quad (59)$$

برای حل عددی نیروی کاهش یافته محوری تعریف شده که محاسبات براساس آن انجام می‌گیرد و به صورت رابطه (60) بیان شده است.

$$F = P - \pi r_{i(M)}^2 p_i \quad (60)$$

یکی از تغییر شکل‌های احتمالی برای شریان پیچش است و یک شرط مرزی پیچش هم برای شریان در نظر گرفته می‌شود. این شرط مرزی به وسیله رابطه (61) بیان شده است.

$$M_t = \int_{r_{i(M)}}^{r_{o(M)}} \sigma_{\theta z(M)} r(M)^2 dr(M) + \int_{r_{i(A)}}^{r_{o(A)}} \sigma_{\theta z(A)} r(A)^2 dr(A) \quad (61)$$

¹ Finite Difference

² Finite Element

³ Finite Volume

⁴ Generalized Differential Quadrature(GDQ)

⁵ Differential Quadrature

می‌گیرد. در ادامه نتایج به دست آمده از این پژوهش با نتایج تجربی مقاله [20] مقایسه می‌شود. سپس مدل سازی شریان کرونر به صورت دولایه با استفاده از تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران [10] انجام خواهد شد. بررسی تنش‌های ایجاد شده در دیواره شریان کرونر انسانی، تنش‌های نهایی قابل تحمل برای دیواره این شریان و فشار داخلی معادل برای ایجاد تنش نهایی در دیواره شریان در ادامه این قسمت مطرح می‌گردد.

4-1- مدل شریان به صورت یک لایه

مدل سازی شریان جهت اعتبارسنجی حل عددی و معادلات مورد بررسی قرار گرفته در این مطالعه به صورت یک لایه با استفاده از تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران [10] و با قرار دادن ثابت‌های عددی مطرح شده در مقاله هولزآپفل و همکاران در سال 2005 [20] انجام شده است. مقادیر عددی به کار رفته در مدل سازی در جدول 1 [20] ارائه و بارگذاری‌های انجام شده روی مدل طبق جدول 2 [20] اعمال شده است.

بارگذاری نیرو و فشار داخلی به صورت همزمان بر شریان انجام شده است و با افزایش تدریجی کشش محوری λ_z ، تنش‌های محوری و محیطی ایجاد شده در دیواره شریان حاصل از مدل سازی با استفاده از مدل ارائه شده در این تحقیق و با به کار بردن ثابت‌های عددی یادشده در جدول 1 و شرایط مرزی جدول 2 به صورت شکل 3 به دست آمده است. برای مقایسه تنش‌های محوری و محیطی برای مدل ارائه شده در این پژوهش و داده‌های تجربی ارائه شده مقاله [20] برای لایه مدیا در شکل‌های جداگانه نشان داده شده‌اند.

شکل 4 نمودار تنش محوری مدل ارائه شده در این مطالعه و داده‌های تجربی مقاله هولزآپفل و همکاران در سال 2005 [20] برای لایه مدیا را نشان می‌دهد. تشابه تنش محوری برای مدل ارائه شده در این مطالعه با داده‌های تجربی مشهود است.

با افزایش کشش محوری تنش محوری افزایش می‌یابد. روند تنش برای مدل پژوهش حاضر و داده‌های تجربی مقاله افزایشی است که این افزایش برای داده‌های تجربی و مدل ارائه شده در این پژوهش روند مشابهی را طی می‌کند. در شکل 5 نمودار تنش محیطی برای مدل ارائه شده در تحقیق حاضر و داده‌های تجربی مقاله هولزآپفل و همکاران [20] ارائه شده است.

با مقایسه نمودارهای تنش محیطی برای دو حالت همان گونه که از شکل 3 پیداست اندازه تنش‌های محیطی بزرگ‌تر از تنش‌های محوری است. روند افزایش تنش‌ها با افزایش کشش محوری در تحقیق حاضر مشابه داده‌های تجربی مقاله هولزآپفل و همکاران [20] است. نتایج به دست آمده از مدل ارائه شده در این تحقیق و داده‌های تجربی ارائه شده در مقاله هولزآپفل و همکاران [20] نشان‌دهنده افزایش مقدار تنش‌های محیطی و محوری در دیواره شریان با افزایش کشش محوری است.

4-2- مدل شریان به صورت دولایه

در این قسمت مدل سازی شریان به صورت دولایه تقویت شده با دو دسته

جدول 1 خصوصیات هندسی و مکانیکی لایه مدیا شریان [20]

مقدار	مشخصات مکانیکی	مقدار	مشخصات هندسی
1	k_{0M} [kPa]	2.08	R_i [mm]
2.31	μ_{0M} [kPa]	0.34	T_M [mm]
8.45	K_{1M} [kPa]	24.9	β_M [°]
12.84	K_{2M} [-]	8	H [mm]

شود گره‌های چپیشوف به صورت روابط (63,64) در جهت‌های r و z تعریف می‌شوند [19].

$$r_i = r_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{i-1}{N-1} \pi \right) (r_N - r_1) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (63)$$

$$z_j = z_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{j-1}{M-1} \pi \right) (z_M - z_1) \quad j = 1, 2, 3, \dots, M \quad (64)$$

با اعمال این گره‌ها در معادلات (66,65) ضرایب روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته برای مشتقات جزئی مرتبه اول به دست خواهند آمد.

$$a_{ij}^r = \frac{1}{(r_j - r_i)} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{r_i - r_k}{r_j - r_k} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad i \neq j \quad (65-a)$$

$$a_{ii}^r = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad i = j \quad (65-b)$$

$$a_{ij}^z = \frac{1}{(z_j - z_i)} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M \frac{z_i - z_k}{z_j - z_k} \quad i, j = 1, 2, \dots, M \quad i \neq j \quad (66-a)$$

$$a_{ii}^z = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M a_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, M \quad i = j \quad (66-b)$$

سپس با جای‌گذاری ضرایب کوادراچر در معادلات (67) مقادیر گسسته‌سازی شده مشتقات جزئی مرتبه اول به دست خواهند آمد.

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial r} = \lambda_r^{(1)}(r_i, z_j) = \sum_{k=1}^N a_{ik}^r \lambda_1(r_k, z_j) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad j = 1, 2, 3, \dots, M \quad (67-a)$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial r} = \lambda_r^{(2)}(r_i, z_j) = \sum_{k=1}^N a_{ik}^r \lambda_2(r_k, z_j) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad j = 1, 2, 3, \dots, M \quad (67-b)$$

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial r} = \lambda_r^{(3)}(r_i, z_j) = \sum_{k=1}^N a_{ik}^r \lambda_3(r_k, z_j) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad j = 1, 2, 3, \dots, M \quad (67-c)$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} = \lambda_z^{(1)}(r_i, z_j) = \sum_{k=1}^M a_{jk}^z \lambda_1(r_i, z_k) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad j = 1, 2, 3, \dots, M \quad (67-d)$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial z} = \lambda_z^{(2)}(r_i, z_j) = \sum_{k=1}^M a_{jk}^z \lambda_2(r_i, z_k) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad j = 1, 2, 3, \dots, M \quad (67-e)$$

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial z} = \lambda_z^{(3)}(r_i, z_j) = \sum_{k=1}^M a_{jk}^z \lambda_3(r_i, z_k) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad j = 1, 2, 3, \dots, M \quad (67-f)$$

با استفاده از این روش، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تبدیل به دستگاه معادلات جبری می‌شوند و با جای‌گذاری مقادیر سیگما در سه معادله تعادل یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی تشکیل می‌شود. با حل دستگاه معادلات حاصل، مجهولات در همه گره‌ها به دست می‌آیند و سپس با استفاده از مجهولات به دست آمده در هر گره می‌توان خروجی‌های مورد نیاز را به دست آورد.

4- اعتبار سنجی و نتایج

در این قسمت ابتدا نتایج عددی حاصل از مدل سازی شریان به صورت یک لایه با استفاده از تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران [10] مورد بررسی قرار

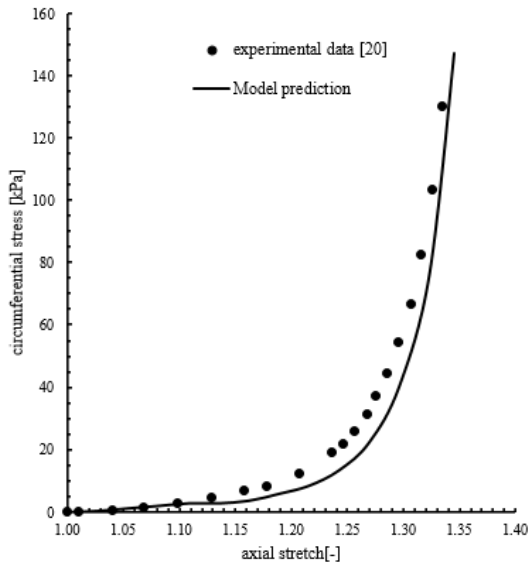


Fig. 5 circumferential stress-axial stretch diagram for model and experimental data

شکل 5 نمودار تنش محیطی-کشش محوری برای مدل و داده های تجربی

است. تنش های موجود در دیواره شریان با استفاده از مدل ارائه شده در این تحقیق با به کار بردن ثابت های عددی بیان شده در جداول 3-5 به صورت شکل 6 به دست آمده اند. این شکل نمودار تنش های محوری، محیطی و شعاعی را نسبت به $(r - r_i)$ نشان می دهد. شعاع استوانه در هر نقطه است و r_i شعاع داخلی استوانه است. تنش شعاعی از مقادیر کوچک منفی روی دیواره داخلی آغاز می شود و با یک روند ملایم در نهایت روی دیواره خارجی شریان به صفر می رسد. تنش محیطی روی دیواره داخلی شریان دارای حداکثر مقدار خود است که این مقدار ابتدا به صورت نسبتاً سریع کاهش می یابد و در ادامه روند این کاهش ملایم می شود، اما این کاهش تا دیواره خارجی شریان ادامه پیدا می کند. تنش محوری هم روی دیواره داخلی دارای بیشینه مقدار خود است که با یک روند کاهشی نسبتاً ملایم نسبت به تنش محیطی کاهش پیدا می کند و در ادامه یک روند ثابت را طی می کند که این روند تا دیواره خارجی شریان ادامه دارد.

نمودار شکل 7 جهت اعتبارسنجی معادلات و حل عددی برای حالت دو لایه برای تنش های محیطی ایجاد شده در دیواره شریان برای مدل ارائه شده در این مقاله و مدل هولز آپفل و همکاران [5] با استفاده از ثابت های عددی جدول 3 برای لایه مدیا، ثابت های عددی جدول 4 برای لایه ادوانتیشا و شرایط مرزی جدول 5 ترسیم شده است. تشابه تنش های محیطی برای دو مدل در شکل 7 مشخص است. نتایج حاصل از مدل ارائه شده در این مقاله و نتایج ارائه شده در مقاله هولز آپفل و همکاران [5] نشان می دهد که حداکثر تنش های محیطی برای هر دو مدل روی دیواره داخلی شریان بوده و با یک روند یکسان در هر دو مدل کاهش پیدا می کند.

جدول 3 خصوصیات هندسی و مکانیکی لایه مدیا [5]

مقدار	مشخصات مکانیکی	مقدار	مشخصات هندسی
1	k_{0M} [kPa]	0.71	R_i [mm]
3.00	μ_{0M} [kPa]	0.26	T_M [mm]
2.3632	K_{1M} [kPa]	29	β_M [°]
0.8393	K_{2M} [-]	8	H [mm]

جدول 2 بارگذاری های شریان برای مدل سازی

Table 2 Loading on the artery for modeling

مقدار	پارامتر
25×10^{-6}	F [N]
0	M_t [N.m]
13.3	p_i [kPa]

الیاف براساس مدل نولان و همکاران [10] با استفاده از مقادیر ثابت بیان شده مقاله هولز آپفل و همکاران [5] برای لایه مدیا و ادوانتیشا انجام شده است. حل معادلات با روش عددی درون یابی مشتق تعمیم یافته انجام و نمودار تنش ها برای این مدل سازی رسم شده است. مقادیر عددی مربوط به هندسه مسأله و ثابت های مکانیکی مربوط به خواص ماده تشکیل دهنده شریان برای لایه مدیا در جدول 3، خصوصیات هندسی مربوط به لایه ادوانتیشا به همراه خصوصیات مکانیکی ماده تشکیل دهنده این لایه در جدول 4 و همچنین بارگذاری های اعمال شده بر استوانه مطابق با مقاله [5] در جدول 5 ارائه شده

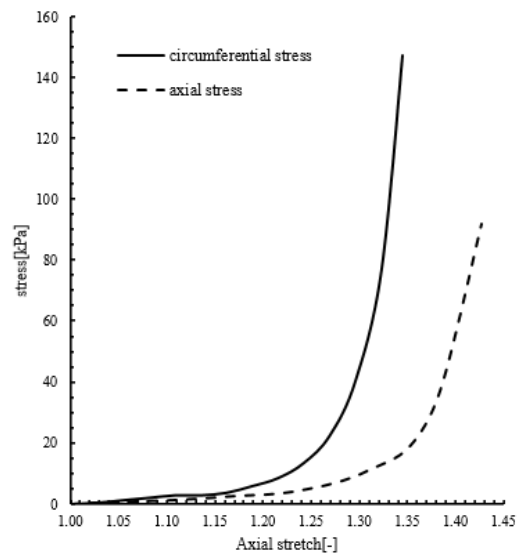


Fig. 3 Stress-Tensile diagram based on the present research model

شکل 3 نمودار تنش-کشش محوری براساس مدل پژوهش حاضر

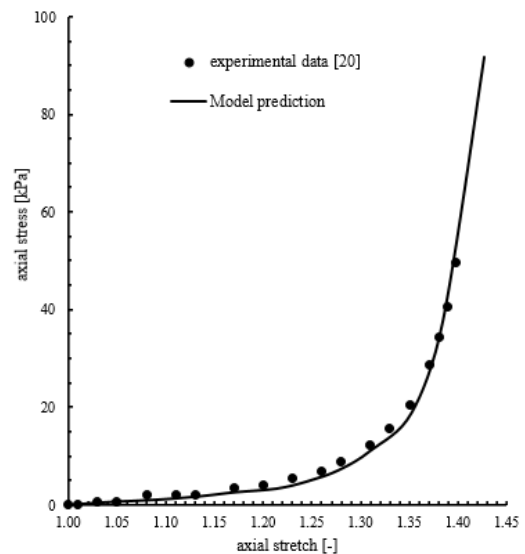


Fig. 4 Axial Stress-axial stretch for Model and Experimental Data

شکل 4 نمودار تنش محوری-کشش محوری برای مدل و داده های تجربی

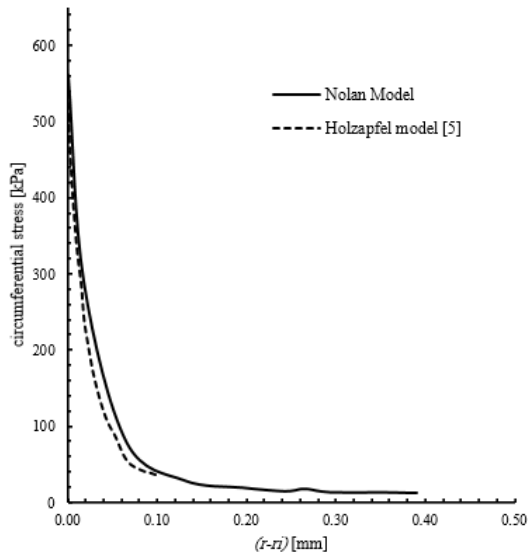


Fig. 7 circumferential stress - Thickness diagram of artery for two models

شکل 7 نمودار تنش محیطی - ضخامت شریان برای دو مدل

نمودار تنش فون- میزز برحسب فشار برای دیواره داخلی شریان است. با تغییر شرط مرزی فشار داخلی، فون- میزز معادل برای همان فشار به دست آمده است و نمودار فون- میزز برحسب فشار به صورت شکل 8 گزارش شده است. از شکل می توان نتایج زیر را دریافت کرد:

- الف- تنش فون- میزز با افزایش فشار داخل شریان بر دیواره داخلی شریان افزایش پیدا می کند.
- ب- در فشارهای پایین تر حساسیت تنش فون- میزز به افزایش فشار کمتر است، ولی با افزایش فشار داخلی شیب نمودار افزایش می یابد.

3-4-1- تنش های نهایی در جهت های محیطی و محوری

تنش های نهایی قابل تحمل برای هر کدام از لایه های شریان در جهت های محوری و محیطی در جدول 9 به صورت زیر نشان داده شده اند. براساس اطلاعات جدول تنش نهایی برای هر دولایه شریان در جهت محیطی بیشتر از محوری و همچنین نشان می دهد که تنش های نهایی برای لایه ادوانتیشا

جدول 6 خصوصیات هندسی و مکانیکی لایه مدیا [20]

مقدار	مشخصات مکانیکی	مقدار	مشخصات هندسی
1	k_{0M} [kPa]	1.82475	R_i [mm]
1.27	μ_{0M} [kPa]	0.22113	T_M [mm]
20.60	K_{1M} [kPa]	20.61	β_M [°]
8.21	K_{2M} [-]	15	H [mm]

جدول 7 خصوصیات هندسی و مکانیکی لایه ادوانتیشا [20]

مقدار	مشخصات مکانیکی	مقدار	مشخصات هندسی
1	k_{0A} [kPa]	2.02887	R_i [mm]
7.56	μ_{0A} [kPa]	0.20412	T_A [mm]
38.57	K_{1A} [kPa]	67	β_A [°]
85.03	K_{2A} [-]	15	H [mm]

جدول 4 خصوصیات هندسی و مکانیکی لایه ادوانتیشا [5]

Table 4 Geometric and Mechanical Properties of the adventitia Layer [5]

مقدار	مشخصات مکانیکی	مقدار	مشخصات هندسی
1	k_{0A} [kPa]	0.97	R_i [mm]
0.3	μ_{0A} [kPa]	0.13	T_A [mm]
0.5620	K_{1A} [kPa]	62	β_A [°]
0.7112	K_{2A} [-]	8	H [mm]

جدول 5 بارگذاری های شریان [5]

Table 5 Loading on the artery [5]

مقدار	پارامتر
25×10^{-6}	F [N]
0	M_t [N.m]
13.3	p_i [kPa]
0	α [°]
0	Φ [°]
1.7	λ_z [-]

3-4-3- مدل سازی شریان کرونر به صورت دولایه

در این قسمت مدل سازی شریان کرونر با استفاده از تابع انرژی کرنشی معرفی شده به وسیله نولان و همکاران [10] به صورت دولایه تراکم پذیر با استفاده از خصوصیات هندسی شریان کرونر [20] و خصوصیات مکانیکی ماده تشکیل دهنده زمینه و الیاف به کار رفته در ساختار شریان [20] انجام شده است. سپس تنش های ایجاد شده در دیواره شریان کرونر با استفاده از شرایط مرزی مورد بررسی قرار گرفته است. خصوصیات هندسی و مکانیکی به کار رفته برای مدل سازی لایه مدیا با استفاده از مقاله هولزآپفل و همکاران 2005 [20] برای شریان کرونر در جدول 6 و خصوصیات هندسی و مکانیکی به کار رفته برای مدل سازی لایه ادوانتیشا با استفاده از مقاله هولزآپفل و همکاران 2005 [20] برای شریان کرونر به صورت جدول 7 است. شرایط مرزی و بارگذاری های انجام شده برای مدل سازی شریان کرونر به صورت جدول 8 خواهد بود. تنش معادل فون میزز به ازای فشارهای داخلی متفاوت تعیین و

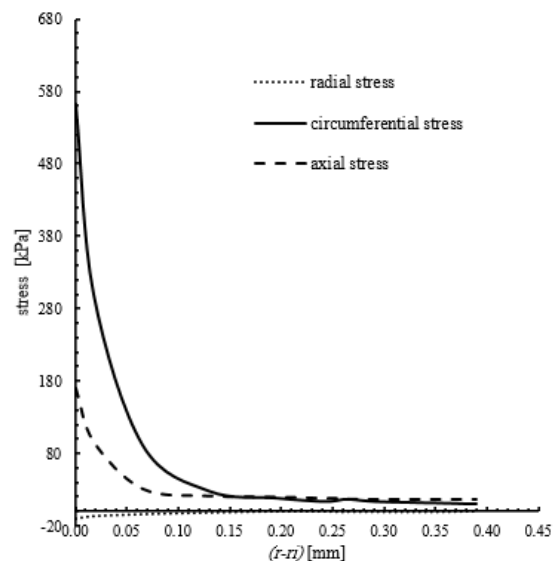


Fig. 6 Stress-Thickness diagrams of artery

شکل 6 نمودار تنش - ضخامت شریان

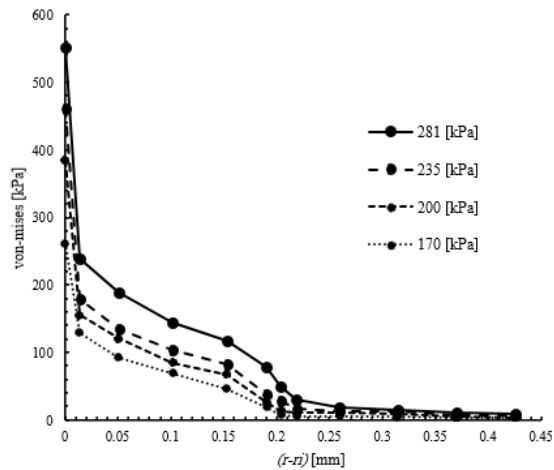


Fig. 9 Von-Mises stress diagram for different pressures

شکل 9 نمودار تنش فون- میزز به ازای فشارهای متفاوت

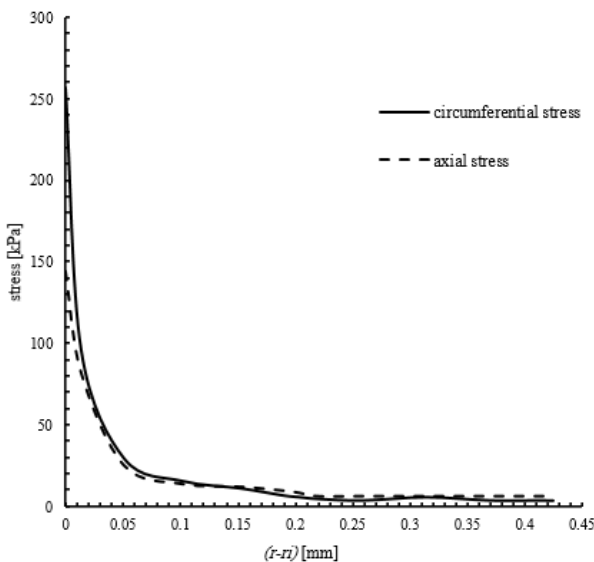


Fig. 10 Stress-Artery Thickness $(r - r_i)$ Diagram

شکل 10 نمودار تنش- ضخامت شریان $(r - r_i)$

است.

5- نتیجه گیری

به طور کلی هدف از مدل سازی های مختلف و ارائه توابع انرژی کرنشی مختلف دستیابی به تابع انرژی کرنشی است که بتواند خواص و خصوصیات مکانیکی شریان را هر چه بهتر نشان دهد و در واقع نتایج آن بیشتر به نتایج تجربی نزدیک باشد. در این مقاله مدل سازی برای اولین بار به صورت دو لایه با استفاده از تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران [10] انجام شد و نتایج زیر حاصل شده است:

- با توجه به نتایج حاصل از مقایسه تنش های ایجاد شده در دیواره شریان با داده های تجربی مشخص شده است که تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران [10] به خوبی تنش در دیواره شریان را مشخص کرده است؛ بنابراین تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران [10] یک تابع انرژی کرنشی مناسب برای مدل سازی شریان است.
- در همه مدل سازی های انجام شده در مقاله حداکثر تنش های ایجاد شده در دیواره شریان روی سطح داخلی قرار دارند و بنابراین می توان

جدول 8 شرایط مرزی اعمال شده برای مدل سازی

Table 8 Boundary conditions applied for modeling

مقدار	پارامتر
1×10^{-3}	$F [N]$
0	$M_i [Nm]$
160	$\alpha [^\circ]$
2.4	$\Phi [^\circ]$
1.2	$\lambda_z [-]$

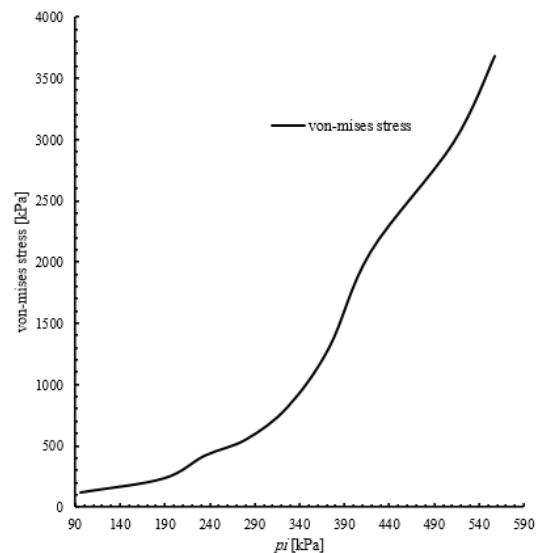


Fig. 8 Von-Mises Stress-Internal Pressure Diagram of Coronary Artery

شکل 8 نمودار تنش فون- میزز- فشار داخلی شریان کرونر

جدول 9 تنش های نهایی برای لایه های شریان کرونر [20]

Table 9 ultimate stresses for coronary artery layers [20]

لایه آدونتیسیا	لایه مدیا	تنش های نهایی [kPa]
1300±692	419±188	تنش محوری
1430±604	446±194	تنش محیطی

بزرگتر از لایه مدیاست.

4-2-3- سطح بحرانی تنش در دیواره شریان

برای مشخص شدن محل ایجاد حداکثر تنش ها در دیواره شریان (سطح بحرانی تنش)، مدل سازی به ازای چند فشار متفاوت انجام شده است و نمودارهای تنش فون- میزز نسبت به ضخامت شریان $(r - r_i)$ برای این مدل سازی ها ترسیم شده که در شکل 9 قابل مشاهده است و این نتیجه گیری را حاصل می کند که حداکثر تنش معادل فون- میزز در دیواره شریان روی سطح داخلی شریان قرار دارد؛ بنابراین سطح بحرانی تنش در دیواره شریان روی سطح داخلی لایه مدیا قرار دارد.

از اطلاعات جدول 9 برای لایه مدیا مشخص می شود که تنش های نهایی قابل تحمل برای این لایه در حالت کاملاً امن مقادیر 231 کیلو پاسکال در جهت محوری و 252 کیلو پاسکال در جهت محیطی هستند.

فشار داخلی 220 کیلو پاسکال حداکثر تنش محیطی قابل تحمل برای شریان با اطلاعات هندسی و مکانیکی مطرح شده است؛ و مدل سازی شریان کرونر به صورت دولایه به ازای این فشار داخلی انجام شده که تنش های محوری و محیطی حاصل نسبت به $(r - r_i)$ در شکل 10 نشان داده شده

قسمت ایزوتروپیک تابع انرژی آزاد هلمهولتز (Nm)	Ψ_{iso}
قسمت غیرایزوتروپیک تابع انرژی آزاد هلمهولتز (Nm)	Ψ_{aniso}
قسمت ایزوتروپیک تابع انرژی آزاد هم حجم (Nm)	$\bar{\Psi}_{iso}$
قسمت غیرایزوتروپیک تابع انرژی آزاد هم حجم (Nm)	$\bar{\Psi}_{aniso}$
زیر نویس ها	
لایه ادوانتیشا	A
لایه مدیا	M

7- مراجع

- [1] M. Sandeep, S. Bhargava, V. Kumar, A Bayesian approach to selecting hyperelastic constitutive models of soft tissue, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 291, pp. 102-122, 2015.
- [2] W. Maurel, Y. Wu, D. Thalmann, N. M. Thalmann, *Biomechanical Models for Soft Tissue Simulation*, pp. 1-23, Berlin Heidelberg Springer-Verlag, 1998.
- [3] W. Kolmer, Geruchsorgan, *Haut und Sinnesorgane*, pp. 192-249, Berlin Heidelberg, Springer, 1927.
- [4] D. J. Patel, J. S. Janicki, Static elastic properties of the left coronary circumflex artery and the common carotid artery in dogs, *Circulation Research*, Vol. 27, No. 2, pp. 149-158, 1970.
- [5] G. A. Holzapfel, T. C. Gasser, R. W. Ogden, A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models, *Elasticity and the Physical Science of Solids*, Vol. 61, No. 1-3, pp. 1-48, 2000.
- [6] T. C. Gasser, R. W. Ogden, G. A. Holzapfel, Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations, *Royal Society Interface*, Vol. 3, No. 6, pp. 15-35, 2006.
- [7] T. C. Gasser, C. A. J. Schulze-Bauer, G. A. Holzapfel, A three-dimensional finite element model for arterial clamping, *Biomechanical Engineering*, Vol. 124, No. 4, pp. 355-363, 2002.
- [8] G. A. Holzapfel, M. Stadler, C. A. J. Schulze-Bauer, A layer-specific three-dimensional model for the simulation of balloon angioplasty using magnetic resonance imaging and mechanical testing, *Biomedical Engineering*, Vol. 30, No. 6, pp. 753-767, 2002.
- [9] J. D. Humphrey, P. B. Canham, Structure, mechanical properties and mechanics of intracranial saccular aneurysms, *Elasticity and the Physical Science of Solids*, Vol. 61, No. 1-3, pp. 49-81, 2000.
- [10] D. R. Nolan, A. L. Gower, M. Destrade, R. W. Ogden, A robust anisotropic hyperelastic formulation for the modelling of soft tissue, *Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Vol. 39, pp. 48-60, 2014.
- [11] M. Mottahedi, H. Hai-Chao, Artery buckling analysis using a two-layered wall model with collagen dispersion, *Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Vol. 60, pp. 515-524, 2016.
- [12] M. Alafzadeh, E. Shirani, E. Yahaghi, N. Fatourae, Effective parameters on variation of wall shear stress in microvessels, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 129-134, 2016. (in Persian)
- [13] G. A. Holzapfel, *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*, pp. 206-295, West Sussex England, John Wiley & Sons, 2000.
- [14] W. H. Hoppmann, L. Wan, Large deformation of elastic tubes, *Biomechanics*, Vol. 3, No. 6, pp. 593-600, 1970.
- [15] V. A. Kas' yanov, A. I. Rachev, Deformation of blood vessels upon stretching, internal pressure, and torsion, *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 16, No. 1, pp. 76-80, 1980.
- [16] A. Delfino, N. Stergiopoulos, J. E. Moore, J. J. Meister, Residual strain effects on the stress field in a thick wall finite element model of the human carotid bifurcation, *Biomechanics*, Vol. 30, No. 8, pp. 777-786, 1997.
- [17] A. D. Shah, J. D. Humphrey, Finite strain elastodynamics of intracranial saccular aneurysms, *Biomechanics*, Vol. 32, No. 6, pp. 593-599, 1999.
- [18] C. Shu, H. Du, Implementation of clamped and simply supported boundary conditions in the GDQ free vibration analysis of beams and plates, *Solids and Structures*, Vol. 34, No. 7, pp. 819-835, 1997.
- [19] F. Civan, C. M. Sliepcevich, Differential quadrature for multi-dimensional problems, *Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 101, No. 2, pp. 423-443, 1984.
- [20] G. A. Holzapfel, G. Sommer, C. T. Gasser, P. Regitnig, Determination of layer-specific mechanical properties of human coronary arteries with nonatherosclerotic intimal thickening and related constitutive modeling, *Physiology Heart and Circulatory Physiology*, Vol. 289, No. 5, pp. 2048-2058, 2005.

گفت که سطح بحرانی دیواره شریان سطح داخلی آن است.

- با توجه به این که در این مقاله مدل سازی شریان به صورت دو لایه شامل مدیا و ادوانتیشاست و بر این اساس لایه داخلی شریان، لایه مدیاست؛ بنابراین در این مقاله لایه مدیا لایه بحرانی شریان است.

- با توجه حداکثر تنش های قابل تحمل برای لایه مدیا شریان کرونر این نتیجه حاصل شده است که حداکثر فشار داخلی قابل تحمل برای شریان مفروض در این مقاله فشار داخلی 220 کیلو پاسکال خواهد بود.

6- فهرست علائم

بردار هادی های جهت الیاف در مختصات اولیه	$a_{0i} \quad i = 4,6$
بردار هادی های جهت الیاف در مختصات تغییر شکل یافته	$a_i \quad i = 4,6$
تانسور تغییر شکل کوشی راست	C
قسمت هم حجم تانسور تغییر شکل کوشی راست	\bar{C}
گرادیان تغییر شکل	F
طول استوانه در حالت تغییر شکل یافته (m)	h
طول استوانه در حالت اولیه (m)	H
تانسور واحد قطری	I
نامتغیر اول تغییر شکل	I_1
نامتغیرهای تغییر شکل توزیع الیاف	$I_i \quad i = 4,6$
دترمینان گرادیان تغییر شکل	J
مدول بالک ایزوتروپیک (Nm^{-2})	k_0
ثابت های غیرایزوتروپیک ماده	$K_i \quad i = 4,6$
ممان پیچشی (Nm)	M_t
فشار داخلی استوانه (Nm^{-2})	p_i
نیروی عمودی محوری (N)	P
مختصات تغییر شکل یافته (m)	r, θ, z
مختصات اولیه (m)	R, Θ, Z
شعاع داخلی استوانه در حالت تغییر شکل یافته (m)	r_i
شعاع داخلی استوانه در حالت اولیه (m)	R_i
شعاع خارجی استوانه در حالت تغییر شکل یافته (m)	r_o
شعاع خارجی استوانه در حالت اولیه (m)	R_o
ضخامت استوانه (m)	T
علائم یونانی	
زاویه قطاع (°)	α
زاویه الیاف (°)	β
زاویه تغییر شکل پیچشی (°)	γ
مدول برشی ایزوتروپیک (Nm^{-2})	μ_0
تنش کوشی (Nm^{-2})	σ
زاویه پیچش (°)	Φ
تابع انرژی آزاد هلمهولتز (Nm)	Ψ
قسمت حجمی تابع انرژی آزاد هلمهولتز (Nm)	Ψ_{vol}