



## تخمین ضریب تمرکز تنش گشودگی دایره‌ای واقع در ورق ارتوتروپیک با استفاده از مدلی جدید بر پایه روش رگرسیونی

علی عباس‌نیا<sup>1</sup>، محمد جعفری<sup>2</sup>، عباس روحانی<sup>3\*</sup>

1- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

3- استادیار، مهندسی مکانیک بیوسیستم، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

\* مشهد، کد پستی 9177948978، arohani@um.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 26 دی 1396

پذیرش: 12 اسفند 1396

ارائه در سایت: 19 فروردین 1397

کلید واژگان:

ضریب تمرکز تنش

گشودگی دایره‌ای

رگرسیون خطی چندگانه

روش متغیر مختلط

### چکیده

یکی از دغدغه‌های طراحان سازه‌های مهندسی، شکست سازه در اثر تمرکز تنش ناشی از ناپیوستگی‌های هندسی در سازه است. لذا با توجه به اینکه صفحات کامپوزیتی دارای گشودگی در اغلب سازه‌های مهندسی کاربرد دارند، مطالعه و بررسی آن‌ها از اهمیت بسیاری برخوردار است. هدف از انجام این مقاله ارائه مدلی جدید بر پایه روش رگرسیونی جهت تخمین ضریب تمرکز تنش در گشودگی دایره‌ای در صفحات ارتوتروپیک می‌باشد. از کاربردهای مهم ارائه توزیع تنش در اطراف گشودگی بر حسب خواص مکانیکی، استفاده از این روابط در تحلیل تنش صفحات ویسکوالاستیک دارای گشودگی با استفاده از روش مدول مؤثر و یا اصل برهم‌نهی بولتزمن است. در ابتدا با استفاده از مقادیر مختلف خواص مکانیکی کامپوزیت‌ها و به کمک حلّی تحلیلی برپایه روش متغیر مختلط، ضریب تمرکز تنش برای تعداد متعددی از این مواد محاسبه شد؛ سپس با استفاده از رگرسیون خطی چندگانه برای گشودگی دایره‌ای رابطه‌ای صریح برای ضریب تمرکز تنش بر حسب خواص مکانیکی ارائه شد. نتایج نشان داد که مدل رگرسیونی قادر به پیش‌بینی تنش محیطی با حداکثر خطای 1 درصد می‌باشد.

## Estimation of stress concentration factor of circular hole in orthotropic plate using a new model based on regression method

Ali Abbasnia<sup>1</sup>, Mohammad Jafari<sup>1</sup>, Abbas Rohani<sup>2\*</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran

2- Department of Bio Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

\* P.O.B. 9177948978 Mashhad, Iran, arohani@um.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 16 January 2018  
Accepted 03 March 2018  
Available Online 08 April 2018

#### Keywords:

Stress Concentration Factor  
Circular Hole  
Multiple Linear Regression  
Complex Variable Method

### ABSTRACT

One of the concerns of designers of engineering structures is structural failure due to stress concentration caused by geometric discontinuities in the structures. Therefore, by considering that perforated composite plates are used in most engineering structures, their study is very important. The purpose of this paper is to present a new model based on the regression method for estimating stress concentration factor of a circular hole in orthotropic plates. One of the important applications of providing stress distribution around holes in terms of mechanical properties is the use of these relationships in the stress analysis of perforated viscoelastic plate using the effective modulus method or Boltzmann's superposition principle. First, using different values of the mechanical properties of the composites plates, and employing an analytical solution based on the complex variable method, the stress concentration factor of circular hole is calculated for a number of these materials. Then, using multiple linear regression, an explicit expression for the stress concentration factor is given in terms of mechanical properties. The results show that the multiple regression model is able to predict the circumferential stress with a maximum error of less than 1%.

### 1- مقدمه

نواحی دارای نقص هندسی رخ می‌دهد، علت این امر نیز تمرکز تنش در اطراف گشودگی‌ها می‌باشد.

در طراحی‌های مهندسی بنا به کاربردهای گوناگون، گاهی نیاز به ایجاد گشودگی در سازه‌ها احساس می‌شود. بدین منظور برای طراحی دقیق یک صفحه‌ی حاوی گشودگی، تحت اثر بارگذاری محوری، بایستی مقدار تمرکز تنش، جهت کاهش اثرات نامطلوب گشودگی تعیین گردد.

امروزه صنعت نیاز فراوانی به استفاده از مواد مرکب برای ساخت سازه‌های مختلف دارد. در سازه‌ها بنا به نیازهای مختلف گشودگی‌هایی ایجاد می‌کند که برخی از دلایل آن عبارتند از: کاهش وزن سازه، اتصال صفحات به دیگر اجزای ماشین، ایجاد راه‌های ورودی و خروجی و همچنین توانایی اتصال تجهیزات به سیستم‌ها. تجربه نشان داده است که شکست در سازه‌ها در

### Please cite this article using:

A. Abbasnia, M. Jafari, A. Rohani, Estimation of stress concentration factor of circular hole in orthotropic plate using a new model based on regression method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 04, pp. 288-294, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

گشودگی استفاده کردند. ایشان به منظور بهبود مقاومت در برابر توزیع تنش، روش‌های توزیع حفره‌ها را مورد بحث قرار دادند. این نتایج نشان داد که دو سوراخ در صفحه برای بهبود توزیع تنش مؤثر بوده و تمرکز تنش را کاهش داد. کومار و همکاران [13] توزیع تنش در صفحات ارتوتروپیک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها توزیع تنش در صفحات ایزوتروپیک و ارتوتروپیک دارای گشودگی دایره‌ای را بررسی کردند و به این نتیجه رسیدند که توزیع تنش با افزایش نسبت  $E_y/E_x$  افزایش یافته و با افزایش  $\mu_{xy}$  کاهش می‌یابد.

جعفری و همکاران [14] توزیع تنش اطراف گشودگی دایره‌ای در ورق ناهمگن تحت بارگذاری درون صفحه‌ای مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها به کمک روش توابع پتانسیل مختلط، برای محاسبه توزیع تنش دوبعدی حول گشودگی دایره‌ای در ورق ناهمگن حلّ تحلیلی ارائه دادند. در این پژوهش بار به صورت کشش ثابت و یکنواخت تک‌محوره و دومحوره به صفحه اعمال شده است. همچنین مرز گشودگی در معرض فشار یکنواخت قرار گرفته است. آن‌ها از روش اجزای محدود نیز برای صحت نتایج حلّ تحلیلی، در تمام حالات بارگذاری برای ورق همگن و ناهمگن استفاده کردند. جعفری و اردلانی [15] توزیع تنش در صفحات همسانگرد محدود حاوی گشودگی مثلثی تحت بارگذاری درون صفحه‌ای را بررسی کردند. آن‌ها بر پایه‌ی روش متغیّر مختلط موشخیلیشویلی و با فرض تنش صفحه‌ای حلّ خود را ارائه دادند. آن‌ها پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش را بررسی کرده و نتایج حلّ تحلیلی خود را با نرم افزار آباکوس مقایسه کردند. جعفری و محمود زاده حسینی [16] با تعمیم روش متغیّر مختلط موشخیلیشویلی، پارامترهای مؤثر بر صفحات همسانگرد حاوی گشودگی‌های چند ضلعی منظم را با استفاده از الگوریتم اجتماع ذرات بهینه سازی کردند. ایشان تأثیر پارامترهایی همچون زاویه چرخش، زاویه بار، هندسه‌ی گشودگی و شعاع انحنای گوشه‌ی گشودگی بر تمرکز تنش حول گشودگی در صفحات همسانگرد تحت کشش تک محوره را بررسی کردند. نتایج نشان داد که با انتخاب شکل مناسب گشودگی و با انتخاب پارامترهای بهینه‌ی آن می‌توان ضریب تمرکز تنش صفحات دارای گشودگی را به میزان قابل توجهی کاهش داد و حتی در مواردی به ضریب تمرکز تنشی کمتر از تمرکز تنش ناشی از گشودگی دایره‌ای دست یافت. توزیع تنش چندلایه‌های متقارن با گشودگی شبه مستطیلی تحت بارگذاری درون صفحه‌ای توسط جعفری و مشیری اول [17] تحلیل شد. آن‌ها با استفاده از بسط حلّ تحلیلی لخنیتسکی تأثیر پارامترهای مختلف همچون نسبت طول به عرض گشودگی، نوع چیدمان لایه‌ها، زاویه‌ی چرخش گشودگی، شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی و زاویه اعمال بار را بررسی کردند و در نهایت برای بررسی درستی نتایج حلّ تحلیلی، از روش اجزای محدود استفاده کردند.

دیریکولو و همکارش [18] نیز از دو روش تحلیلی و یک ابزار تجزیه و تحلیل اجزای محدود به نام FRANC2DL، رابطه‌ای برای ضریب تمرکز تنش در لبه‌ی گشودگی دایره‌ای ارائه کردند. آن‌ها در پژوهش خود ماده‌ی کربن/اپوکسی را برای مطالعه در نظر گرفتند. توزیع تنش صفحات کامپوزیتی حاوی گشودگی دایره‌ای توسط کاراما و همکاران [19] بررسی شد. آن‌ها برای بررسی کشش از روش اندازه‌گیری غیر تماسی ESPI استفاده کردند. آن‌ها نتایج خود را با مطالعه‌ی لخنیتسکی مقایسه کردند. تعمیم معیار حداکثر تنش محیطی به مواد ارتوتروپیک تحت بارگذاری مود ترکیبی با در نظر گرفتن تنش T توسط فکور و همکاران [20] انجام شد. آن‌ها یک معیار کلی برای پیش بینی شکست مواد ارتوتروپیک تحت بارگذاری مود ترکیبی ارائه کردند.

هولند [1] توانست توزیع تنش در صفحات حاوی سوراخ دایره‌ای تحت کشش را بررسی کند. او روابطی برای صفحات نامحدود دارای گشودگی دایره‌ای ارائه کرده است. پس از آن موشخیلیشویلی [2] بر پایه‌ی تئوری الاستیک دوبعدی، روش متغیّر مختلط را معرفی کرد. او تعیین ضریب تمرکز تنش در ورق حاوی گشودگی را محدود به محاسبه دو تابع تحلیلی هولومورفیک کرد. همچنین با ترکیب این روش با نگاشت همنوا توانست در جسم الاستیک دوبعدی، توزیع تنش در ورق حاوی گشودگی‌های غیر دایره‌ای را نیز تحلیل کند. ساوین [3] با استفاده از روش متغیّر مختلط موشخیلیشویلی ورق نامحدود همسانگرد و ناهمسانگرد را برای گشودگی‌های مختلف تحلیل کرد. او در مواد همسانگرد توزیع تنش اطراف گشودگی با اشکال مختلف را ارائه داد و در مواد ناهمسانگرد، تنها گشودگی دایره‌ای و بیضی را مورد تحلیل قرار داد. لخنیتسکی [4] بررسی‌های متعددی بر روی ضریب تمرکز تنش در مواد ارتوتروپیک انجام داد. او با استفاده از روش متغیّر مختلط موشخیلیشویلی برای مواد ناهمسانگرد در صفحات نامحدود حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضی توزیع تنش را به دست آورد.

شارما [5] به کمک روش متغیّر مختلط موشخیلیشویلی تمرکز تنش حول گشودگی‌های دایره‌ای، بیضی و مثلثی در صفحات کامپوزیتی نامحدود تحت تنش دو محوری را مورد بررسی قرار داد. او در پژوهش خود اثر جهت‌گیری الیاف، عامل بارگذاری، زاویه بارگذاری و همچنین هندسه گشودگی در صفحات ارتوتروپیک را مورد بررسی قرار داد. تمرکز تنش حول گشودگی دایره‌ای در صفحه‌ی بی‌نهایت تحت کشش یکنواخت دو محوری و بارگذاری برشی توسط محمدی و همکارانش [6] مورد بررسی قرار گرفت. خچای و همکاران [7] با استفاده از اجزای محدود، توزیع تنش و ضریب شکست در صفحات کامپوزیتی ایزوتروپیک و ارتوتروپیک دارای حفره دایره‌ای تحت بارگذاری یک طرفه و دو طرفه را مورد تحلیل قرار دادند.

بنرجی و همکاران [8] توزیع تنش اطراف گشودگی دایره‌ای واقع در مرکز صفحات ایزوتروپیک و ارتوتروپیک، تحت بارگذاری عرضی را با استفاده از روش عددی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها تأثیرات جنس مواد، قطر گشودگی و همچنین ضخامت صفحه را در صفحات ارتوتروپیک، بر میزان تمرکز تنش مورد بررسی قرار دادند. ایشان نشان دادند که می‌توان با انتخاب پارامترهای بهینه تمرکز تنش را به میزان قابل توجهی کاهش داد. دهارمین، خوشبو و چتان [9] به کمک روش متغیّر مختلط موشخیلیشویلی صفحات ایزوتروپیک و ارتوتروپیک حاوی گشودگی دایره‌ای را تحت تنش یک طرفه بررسی کردند. آن‌ها در پژوهش خود مقالاتی که توزیع تنش در صفحات نامحدود دارای گشودگی مطالعه شده بود را بررسی کردند. همچنین آن‌ها تعدادی از روش‌های تحلیلی و تجربی برای تحلیل تنش در اطراف انواع گشودگی با شرایط مختلف در یک صفحه بی‌نهایت تحت بارگذاری متفاوت را گزارش کرده‌اند. آرادهی و همکاران [10] نیز به صورت تجربی تمرکز تنش در صفحات ایزوتروپیک و ارتوتروپیک با گشودگی‌های دایره‌ای را مورد بررسی قرار دادند. ایشان بارگذاری را کششی در نظر گرفته و از فولاد و کربن-اپوکسی در پژوهش خود استفاده کردند و در نهایت نتایج را با نرم افزار انسیس مقایسه کردند.

ابوالفتوح [11] رابطه‌ی واحدی را برای مؤلفه‌ی تنش مماس بر مرز گشودگی برای هندسه‌های دایروی، بیضی، مثلثی و مربعی در ورق نامحدود از ماده‌ی ناهمسانگرد خاص، تحت بار کششی بیان نمود. ژوانگ و همکاران [12] به مطالعه‌ی تأثیر گشودگی بر تمرکز تنش در صفحات همسانگرد پرداختند. آن‌ها از مدل اجزای محدود برای صفحات ایزوتروپ دایره‌ای

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (1) در معادله‌ی تعادل، معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه چهارم  $F$  به دست می‌آید (معادله‌ی (2)).

$$\begin{aligned} R_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2R_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2R_{12} + R_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - 2R_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + R_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

در واقع معادله‌ی (2)، معادله‌ی سازگاری برای ماده‌ی غیرهمسان‌گرد می‌باشد که  $F(x,y)$  تابع تنش و  $R_{ij}$  اعضای ماتریس نرمی کاهش یافته می‌باشند. لختیستکی نشان داده است که معادله‌ی (2) به کمک چهار اپراتور مشتق خطی مرتبه‌ی اول  $D_k$  به صورت رابطه‌ی (3) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} D_1 D_2 D_3 D_4 F = 0 \\ D_k = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x}, \quad k = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (3)$$

$\mu_k$  ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی رابطه‌ی (4) می‌باشد.

$$\begin{aligned} R_{11} \mu^4 - 2R_{16} \mu^3 + (2R_{12} + R_{66}) \mu^2 + 2R_{26} \mu \\ + R_{22} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

رابطه‌ی (4) در حالت کلی چهار ریشه‌ی موهومی دارد. لختیستکی اثبات کرد که این معادله‌ی مشخصه دارای ریشه‌های دو به دو مزدوج به صورت رابطه‌ی (5) می‌باشند:

$$\begin{aligned} \mu_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1 \\ \mu_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2 \end{aligned} \quad (5)$$

با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه، بیان کلی تابع تنش  $F$  به صورت رابطه‌ی (6) خواهد بود:

$$\begin{aligned} F(x,y) = 2\text{Re}[f_1(z_1) + f_2(z_2)] \\ k=1,2 \text{ برای } z_k = x + \mu_k y \end{aligned} \quad (6)$$

می‌باشند. با به‌کارگیری این رویکرد، مسأله به تعیین دو تابع  $f_2$  و  $f_1$  به گونه‌ای که شرایط مرزی لبه‌ی گشودگی را ارضا کند؛ محدود می‌شود. بنابراین تنش‌ها از رابطه‌ی (7) تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\text{Re}[\mu_1^2 f_1''(z_1) + \mu_2^2 f_2''(z_2)] \\ \sigma_y &= 2\text{Re}[f_1''(z_1) + f_2''(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2\text{Re}[\mu_1 f_1''(z_1) + \mu_2 f_2''(z_2)] \end{aligned} \quad (7)$$

باتوجه به مرز گشودگی بهتر است تا تنش‌های فوق در دستگاه مختصات قطبی ارائه شوند. چون در این دستگاه در مرز گشودگی تنش‌های برشی و شعاعی ( $\tau_{r\theta} = \sigma_r = 0$ ) صفر خواهند بود و تنها تنش باقیمانده تنش محیطی ( $\sigma_\theta$ ) است.

## 2-2- تحلیل رگرسیونی

با توجه به اینکه ضریب تمرکز تنش در صفحات با گشودگی دایره‌ای تابعی از چهار متغیر  $E_1, E_2, \nu_{12}$  و  $G_{12}$  می‌باشد. جهت بی‌بعد سازی تنش از نسبت  $\sigma_\theta / \sigma_0$  استفاده شده است که برابر همان ضریب تمرکز تنش است. در اینجا  $\sigma_0$  تنش اعمالی در مرز ورق بوده که میزان آن 1 Pa می‌باشد. همچنین به دلیل آنکه متغیر  $\nu_{12}$  بر خلاف سه عامل دیگر بدون بعد بوده، بنابراین به کمک ترکیبات مختلفی از  $E_1, E_2, G_{12}$  اقدام به بی‌بعد سازی متغیرها شده است. برای بی‌بعد سازی متغیرها از شش گزینه به عنوان متغیرهای مستقل مدل رگرسیونی خطی چندگانه<sup>1</sup> استفاده شد.

<sup>1</sup> MLR

اگرچه پژوهش‌های فراوانی در زمینه گشودگی در مواد کامپوزیتی صورت گرفته است ولی تحقیقاتی که در آن رابطه‌ای صریح جهت تخمین ضریب تمرکز تنش بر حسب مدول الاستیک، ضریب پواسون و مدول برشی ارائه کند؛ کمتر مورد توجه قرار گرفته است. با ارائه‌ی رابطه‌ی ریاضی برای ضریب تمرکز تنش برحسب خواص مکانیکی، می‌توان با استفاده از اصل برهم‌نهی بولتزمن مسأله را به ورق ویسکوالاستیک بسط داد. لذا در این پژوهش سعی می‌شود یک رابطه‌ی تحلیلی برای محاسبه‌ی ضریب تمرکز تنش گشودگی دایره‌ی واقع در یک ورق ارتوتروپیک مورد بررسی قرار گیرد. لختیستکی [4] رابطه‌ای برای ضریب تمرکز تنش صفحات ارتوتروپیک نامحدود تحت کشش ارائه کرده است؛ اما مزیت رابطه‌ی موجود در این پژوهش، این است که توانایی محاسبه تنش در صفحات ایزوتروپیک و ارتوتروپیک را نیز دارد.

## 2- مواد و روش‌ها

مسأله مورد مطالعه در این پژوهش، یک ورق ارتوتروپیک نامحدود دارای گشودگی دایره‌ای می‌باشد که تحت بارگذاری محوری قرار گرفته است. همان‌طور که در شکل 1 ملاحظه می‌شود، گشودگی در مرکز صفحه واقع است. رفتار ورق در ناحیه الاستیک خطی بررسی می‌شود. تحلیل مسأله با فرض تنش صفحه‌ای صورت می‌گیرد.

## 2-1- مجموعه داده و حل تحلیلی

برای تحلیل رگرسیونی یک مجموعه داده کافی و جامع نیاز است. بدین منظور از 103 ماده‌ی مختلف با ویژگی‌های متفاوت استفاده شد، که برخی از ویژگی‌های مکانیکی مواد شاخص در جدول 1 آمده است [21-23].

براساس تئوری الاستیسیته لختیستکی در اجسام ناهمسانگرد، محاسبه‌ی تابع تنش وابسته به محاسبه‌ی ضرایب نامشخص است که با نام تابع تنش ابری شناخته می‌شوند. این ضرایب نامشخص با توجه به شرایط مرزی حول گشودگی محاسبه می‌شوند. تابع تنش در صفحات نامحدود ناهمسانگرد حاوی گشودگی‌های دایره‌ای و بیضوی توسط لختیستکی [4] و ساوین [3] محاسبه شده است.

برای ارضا شدن معادلات تعادل بایستی تابع تنش  $F(x,y)$  را می‌توان به صورت رابطه‌ی (1) تعریف کرد.

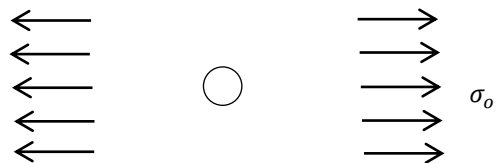


Fig. 1 Schematic of unlimited sheet with circular hole under uniaxial tensile

شکل 1 شماتیک ورق نامحدود دارای گشودگی دایره‌ای تحت کشش یک‌طرفه

جدول 1 خواص مکانیکی مواد [23]

نام ماده	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
ای-گلس/اپوکسی	39.0	8.6	3.8	0.28
اس-گلس/اپوکسی	43.0	8.9	4.5	0.27
وون گلس/اپوکسی	29.7	29.7	5.3	0.17
کولار/اپوکسی	87.0	5.5	2.2	0.34
کربن/اپوکسی	142.0	10.3	7.2	0.27
کربن/پیک	131.0	8.7	5.0	0.28

مکانیسم روش  $k$ -fold بدین صورت است که، ابتدا مجموعه داده‌ها تصادفی شد و سپس به  $k=5$  قسمت تقسیم شد. بدین ترتیب پنج مجموعه داده مختلف برای کالیبراسیون مدل و ارزیابی مدل ایجاد شد (شکل 2). این روش بیست بار تکرار شد که در انتها، 100 مجموعه داده مختلف ایجاد گردید.

### 3- نتایج و بحث

#### 3-1- انتخاب متغیرهای مدل

همان‌طور که قبلاً گفته شد، ضریب تمرکز تنش در صفحات با گشودگی دایره‌ای تابعی از چهار متغیر  $E_1, E_2, \nu_{12}$  و  $G_{12}$  می‌باشد. هر مدل به کمک 100 مجموعه داده مختلف در دو مرحله کالیبراسیون و تست ارزیابی شد. ابتدا مدل رگرسیونی به شکل خطی و مطابق با رابطه (12) برازش شد. میانگین و انحراف معیار خطاهای مدل (MAPE و RMSE) در جدول 3 آورده شده است. در مرحله کالیبراسیون ضرایب رگرسیونی مدل MLR تخمین زده شد. نتایج نشان می‌دهد که بهترین متغیرهای مدل MLR برای تخمین تمرکز تنش در گشودگی دایره‌ای شامل متغیرهای  $E_1, E_2, \nu_{12}$  و  $G_{12}$  می‌باشد. زیرا به کارگیری آن‌ها منجر به کمترین مقدار میانگین و انحراف معیار (MAPE و RMSE) در هر دو مرحله کالیبراسیون و تست شدند.

#### 3-2- انتخاب شکل مدل

پس از آنکه بهترین متغیرهای مستقل مؤثر برای مدل MLR مشخص شد. شکل‌های مختلف از مدل MLR شامل خطی (رابطه (10))، اثرات متقابل (رابطه (11))، درجه دوم (رابطه (12)) و درجه دوم کاهش یافته (رابطه (13)) را برای یافتن بهترین شکل مدل ارزیابی شد. ارزیابی به کمک روش رگرسیونی گام به گام جهت پیدا کردن عامل‌های معنی‌دار در مدل در مرحله کالیبراسیون و نیز روش  $k$ -fold انجام شد. میانگین و انحراف معیار MAPE و RMSE مدل‌ها در جدول 4 آمده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، می‌توان بر اساس عملکرد مدل‌ها (مقادیر پایین خطا) به ترتیب مدل‌های درجه دوم، درجه دوم کاهش یافته، 2FI و خطی در تخمین ضریب تمرکز تنش در گشودگی دایره‌ای در کنار یکدیگر قرار داد. بنابراین بهترین شکل مدل MLR درجه دوم انتخاب شد. میانگین درصد خطای کل این مدل برابر با 0.82 درصد شد.

جدول 2 تجزیه واریانس مدل رگرسیونی

Table 2 Analysis of variance table for the regression model			
متوسط مربعات	مجموع مربعات	درجه آزادی	منبع تغییرات
$MS_R = \frac{SS_R}{p-1}$	$SS_R = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$p-1$	رگرسیون
$MS_E = \frac{SS_E}{n-p}$	$SS_E = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$	$n-p$	باقی‌مانده
-	$SS_T = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$	$n-1$	کل

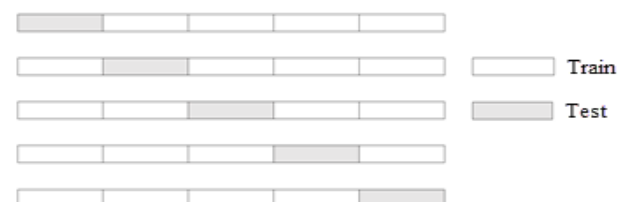


Fig. 2 A 5-fold cross validation

شکل 2 اعتبار سنجی 5-fold

به کمک این طرح آماری کلیه ضرایب مدل رگرسیون و اثرات متقابل فاکتورها قابل برآورد هستند. در این روش از یک مدل رگرسیون برای برازش ضریب تمرکز تنش استفاده شد که این مدل به صورت رابطه (8) بیان می‌شود.

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^m b_i x_i + \sum_{i=1}^m b_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=2}^l b_{ij} x_i x_j + \epsilon \quad (8)$$

که در آن،  $Y$ ، متغیر پاسخ (ضریب تمرکز تنش)،  $b_0$ ، ضریب ثابت،  $b_i$  اثر خطی،  $b_{ii}$  اثرات درجه دوم،  $b_{ij}$  اثرات متقابل  $\epsilon$  خطای مدل و  $x_i$  متغیرهای مستقل می‌باشند. رابطه‌ی 8 با توجه به تعداد متغیرها قابل بسط می‌باشد که برای مطالعه‌ی حاضر به صورت رابطه‌ی (9) بسط می‌یابد.

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{14} x_1 x_4 + b_{23} x_2 x_3 + b_{24} x_2 x_4 + b_{34} x_3 x_4 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{44} x_4^2 \quad (9)$$

که در آن،  $Y$  تنش محیطی  $\sigma_\theta$ ،  $x_1$  مدول الاستیک  $E_1$ ،  $x_2$  مدول الاستیک  $E_2$ ،  $x_3$  نسبت پواسون  $\nu_{12}$  و  $x_4$  مدول برشی  $G_{12}$  می‌باشد.

مدل‌های رگرسیونی برای پیش‌بینی تنش محیطی در رابطه‌های (10) (مدل خطی)، (11) (مدل با اثرات متقابل (2FI))، (12) (مدل درجه دوم) و (13) (مدل درجه دوم کاهش یافته) آورده شده است.

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 \quad (10)$$

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{14} x_1 x_4 + b_{23} x_2 x_3 + b_{24} x_2 x_4 + b_{34} x_3 x_4 \quad (11)$$

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{14} x_1 x_4 + b_{23} x_2 x_3 + b_{24} x_2 x_4 + b_{34} x_3 x_4 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{44} x_4^2 \quad (12)$$

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{44} x_4^2 \quad (13)$$

شکل کلی تجزیه واریانس مدل رگرسیونی خطی چند گانه در جدول 2 آورده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در مدل رگرسیونی مجموع تغییرات کل (SST) به دو عامل مجموع مربعات رگرسیون (SSR) و مجموع مربعات خطا (SSE) تجزیه می‌شود. در جدول 2،  $n$  تعداد داده‌ها،  $p$  پارامترهای مدل،  $\nu$  ضریب تمرکز تنش محاسبه شده از روش تحلیلی،  $\bar{y}$  پاسخ مدل،  $\bar{y}$  میانگین ضریب تمرکز تنش می‌باشد. بدین ترتیب می‌توان اثر معنی داری برای هر یک از عامل‌های مدل ارزیابی شود.

پس از انتخاب یکی از چهار مدل رگرسیونی خطی، اثرات متقابل، درجه دوم کاهش یافته، درجه دوم و نیز تجزیه واریانس، عامل‌هایی که اثرات معنی دار ندارند از مدل حذف خواهد شد. سپس می‌توان به کمک مدل نهایی ضریب تمرکز تنش را بر حسب ویژگی‌های مواد محاسبه کرد (رابطه (14)).

#### 3-2- ارزیابی مدل MLR

برای نشان دادن و ارزیابی بهتر قابلیت مدل MLR، کل داده‌ها به شکل تصادفی به دو گروه کالیبراسیون و آزمون تقسیم شد. به ترتیب سهم داده‌های کالیبراسیون و تست برابر با 80 و 20 درصد از کل مجموعه داده‌ها در نظر گرفته شد. علاوه بر این موارد از روش  $k$ -fold برای نشان دادن بهتر قابلیت مدل MLR استفاده شد. به طوریکه هر مدل به کمک 100 مجموعه داده مختلف در دو مرحله کالیبراسیون و تست ارزیابی شد. در انتها میانگین و انحراف معیار خطاهای مدل (MAPE و RMSE) گزارش شد. در مرحله کالیبراسیون ضرایب رگرسیونی مدل MLR تخمین زده شد و در مرحله آزمون قابلیت تخمین مدل به ازای مجموعه داده‌های جدید ارزیابی شد.

### 3-3- عیب شناسی مدل رگرسیون

معتبر بودن مدل رگرسیونی منوط به نرمال بودن توزیع آماری خطاهای مدل رگرسیون، مستقل بودن خطاها و نبود خود همبستگی بین خطاها می‌باشد. در شکل 3، نتایج ارزیابی اعتبار و عیب شناسی مدل رگرسیون درجه دوم انتخاب شده برای تخمین ضریب تمرکز تنش در مرحله کالیبراسیون آورده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، خطاهای مدل از توزیع نرمال تبعیت می‌کنند (شکل 3 (a) و (c)). زیرا پراکندگی خطاهای مدل حول خط نرمال است. البته نتیجه‌ی آزمون کلموگروف-اسمیرنوف نیز این فرضیه را تایید کرد. شکل 3 (b) نیز نشان می‌دهد که، خطاها دارای توزیع تقریباً یکنواختی و مستقل از یکدیگر هستند. همچنین عدم وجود خود همبستگی بین خطاهای مدل رگرسیونی در شکل 3 (d) قابل مشاهده است. زیرا هیچ روند تغییرات مشخصی برای آن قابل تصور نیست. بنابراین با نتایج حاصل شده می‌توان به تخمین‌های مدل رگرسیونی درجه دوم پیشنهاد شده اعتماد کرد.

### 3-4- تجزیه واریانس مدل رگرسیون

نتیجه‌ی تجزیه واریانس مدل درجه دوم MLR در جدول 5 آورده شده است. همان‌طور که مقادیر p-value نشان می‌دهد (0.00)، همه عامل‌های مدل که توسط روش رگرسیون گام به گام انتخاب شده‌اند در سطح معنی داری یک درصد معنی دار شده‌اند. تنها عامل  $x_1x_2$  از مدل درجه دوم حذف شد زیرا مقدار  $p\text{-value} > 0.05$  شد. بنابراین بهترین شکل مدل نیز بدین طریق انتخاب شد. علاوه بر این، نتایج نشان داد که مقدار ضریب تبیین ( $R^2$ ) و ضریب تبیین تصحیح شده ( $R^2_{adj}$ ) مدل تقریباً برابر با یکدیگر هستند (99 درصد)، لذا اولاً مدل رگرسیونی کالیبره شده توانسته است حدود 99 درصد تغییرات ضریب تمرکز تنش را به کمک عامل‌های مدل تبیین کند و ثانیاً به دلیل نزدیکی این دو مقدار می‌توان گفت که عامل‌های مدل جهت تخمین ضریب تمرکز تنش کفایت می‌کنند.

### 3-5- ارزیابی آماری مدل رگرسیون

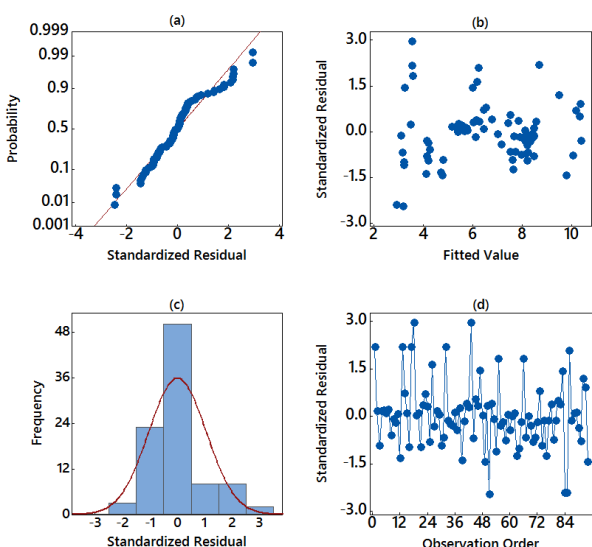
برای نشان دادن بهتر اعتبار مدل رگرسیونی استخراج شده، از ارزیابی آماری نیز استفاده شد. مقادیر برخی ویژگی‌های آمار توصیفی شامل میانگین (Mean)، واریانس (Var.)، چولگی (Ske.) و کشیدگی (Kur.) دو مجموعه

جدول 3 میانگین و انحراف معیار خطای مدل MLR به ازای متغیرهای مختلف

داده‌ی واقعی و پیش بینی شده از ضریب تمرکز تنش گشودگی دایره‌ای در دو مرحله کالیبراسیون و تست در جدول 6 آورده شده است. همچنین مقادیر p-value حاصل از آزمون آماری مقایسه‌ی میانگین، واریانس و توزیع آماری دو مجموعه داده مذکور نیز آورده شده است.

به ترتیب برای مقایسه‌ی میانگین، واریانس و توزیع آماری از آزمون‌های آماری t-test، فیشر و کولموگروف-اسمیرنوف در سطح معنی داری 5 درصد استفاده شد. نتایج نشان می‌دهد که اختلاف بسیار ناچیزی بین ویژگی‌های آماری توصیفی مقادیر واقعی و پیش بینی شده در هر دو مرحله کالیبراسیون و تست وجود دارد. همچنین مقدار p-value نشان داد که در تمام موارد بزرگتر از 0.05 است لذا می‌توان بیان کرد که هر دو مجموعه داده‌ی واقعی و پیش‌بینی شده از تمرکز تنش گشودگی دایره‌ای مشابه یکدیگر هستند.

بنابراین ضرایب مدل رگرسیونی به خوبی محاسبه شده‌اند. همان‌طور که در شکل 4 نیز دیده می‌شود، در هر دو مرحله کالیبراسیون مدل و تست، مقدار ضریب همبستگی بین دو مجموعه داده‌ی واقعی و پیش بینی شده برابر با 0.999 شد. همچنین شیب و عرض از مبدا خط رگرسیونی



شکل 3 نتایج ارزیابی اعتبار مدل رگرسیون MLR

Table 3 Mean and standard deviation of MLR model for different variables

کل		تست		کالیبراسیون		متغیرها
RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	
0.43±0.00	6.98±0.15	0.45±0.05	7.36±1.47	0.42±0.01	6.89±0.39	$E_1/E_2, E_1/G_{12}, v_{12}$
0.79±0.01	10.86±0.55	0.85±0.14	11.55±2.01	0.78±0.03	10.69±0.70	$E_1/E_2, G_{12}/E_1, v_{12}$
0.21±0.00	3.11±0.07	0.22±0.03	3.28±0.60	0.21±0.00	3.07±0.16	$E_2/E_1, E_1/G_{12}, v_{12}$
1.26±0.02	19.23±0.51	1.31±0.18	20.53±3.67	1.25±0.04	18.92±0.57	$E_2/E_1, G_{12}/E_1, v_{12}$
1.22±0.00	17.57±0.34	1.22±0.16	17.98±2.76	1.21±0.04	17.84±0.67	$E_2/E_1, E_2/G_{12}, v_{12}$
1.27±0.01	18.84±0.55	1.29±0.15	19.41±2.61	1.26±0.04	18.69±0.81	$E_2/E_1, G_{12}/E_2, v_{12}$

جدول 4 نتیجه ارزیابی مدل‌های مختلف MLR

Table 4 The result of evaluating various MLR models

کل		تست		کالیبراسیون		مدل
RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	
0.21±0.00	3.11±0.07	0.22±0.03	3.28±0.60	0.21±0.00	3.07±0.16	خطی
0.20±0.00	2.99±0.07	0.23±0.04	3.28±0.60	0.19±0.00	2.88±0.17	اثرات متقابل
0.06±0.00	0.92±0.02	0.07±0.04	1.06±0.32	0.06±0.00	0.88±0.06	درجه دوم کاهش یافته
0.05±0.00	0.82±0.04	0.07±0.02	1.01±0.32	0.05±0.00	0.77±0.06	درجه دوم

جدول 5 نتیجه تجزیه واریانس مدل درجه دوم MLR

**Table 5** The result of the variance analysis of the quadratic MLR models

P-value	DF	SS	MS	F-value	
0.00	8	394.84	49.36	12761	مدل
0.00	1	244.25	244.25	63156	$x_1(\frac{E_2}{E_1})$
0.00	1	146.35	146.35	37843	$x_2(\frac{E_1}{G_{12}})$
0.00	1	0.09	0.09	24.29	$x_3(u_{12})$
0.00	1	0.27	0.27	68.95	$x_1x_3$
0.00	1	0.30	0.30	77.97	$x_2x_3$
0.00	1	2.37	2.37	612.95	$x_1^2$
0.00	1	1.17	1.17	303.58	$x_2^2$
0.00	1	0.03	0.03	7.82	$x_3^2$
Error	85	0.33	0.00		خطا
Total	93	395.17			کل
			$R^2 = 99.92\%$	$R^2_{adj} = 99.91\%$	

ما بین دو مجموعه داده تقریباً برابر با یک و نزدیک به صفر است. بنابراین عملکرد مدل MLR در مرحله‌ی تست نیز کاملاً قابل قبول است.

**3-6- ارزیابی پایداری و قابلیت تعمیم پذیری مدل رگرسیون**

همان‌طور که قبلاً اشاره شد برای ارزیابی بهتر مدل، از 80 درصد کل مجموعه داده‌ها به شکل تصادفی برای کالیبراسیون مدل (تخمین ضرایب مدل) و 20 درصد باقی‌مانده برای تست مدل استفاده شد. اما برای نشان دادن ویژگی تعمیم پذیری مدل MLR درصد مجموعه داده‌های کالیبراسیون، کاهش داده شد. بنابراین از درصد‌های 80، 60، 40 و 20 برای مجموعه داده‌های کالیبراسیون یا 20، 40، 60 و 80 درصد برای مجموعه داده‌های تست استفاده شد. بدین طریق قابلیت تعمیم‌پذیری مدل در مقابل کاهش اندازه مجموعه داده‌های کالیبراسیون سنجیده شد. مقادیر میانگین و انحراف معیار RMSE و MAPE مدل برای 100 مجموعه داده‌ی مختلف حاصل از روش k-fold در جدول 7 نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود،

جدول 6 ارزیابی آماری عملکرد پیش بینی مدل درجه دوم MLR

**Table 6** Statistical evaluation of the prediction function of the quadratic MLR models

تست				کالیبراسیون				
Kur.	Ske.	Var.	Mean	Kur.	Ske.	Var.	Mean	
2.47	-0.10	3.16	6.83	2.05	0.02	4.25	6.32	واقعی
2.46	-0.11	3.21	6.82	2.03	0.03	4.25	6.32	پیش بینی شده
	0.99	0.97	0.90	0.99		0.99	0.99	p-value

جدول 7 ارزیابی قابلیت تعمیم پذیری مدل درجه دوم MLR

**Table 7** Evaluation of the MLR quadratic model's generalizability

کل		تست		کالیبراسیون		
MAPE	RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	RMSE	TS (%)
0.79	0.06					100
0.81±0.02	0.05±0.01	0.96±0.28	0.06±0.01	0.77±0.06	0.05±0.00	$\bar{x} \pm std$
0.83	0.06	0.65	0.05	0.88	0.06	Best
0.86±0.11	0.06±0.01	1.04±0.34	0.07±0.02	0.75±0.10	0.05±0.00	$\bar{x} \pm std$
0.87	0.06	0.85	0.06	0.85	0.06	Best
0.95±0.17	0.07±0.02	1.12±0.33	0.08±0.03	0.71±0.14	0.04±0.00	$\bar{x} \pm std$
0.82	0.06	0.81	0.06	0.82	0.06	Best
1.80±1.22	0.17±0.13	2.12±1.54	0.19±0.15	0.48±0.23	0.03±0.01	$\bar{x} \pm std$
1.17	0.08	1.20	0.08	1.07	0.07	Best

TS = اندازه‌ی داده‌های انتخاب شده در مرحله‌ی کالیبراسیون

مقادیر میانگین خطاهای مدل با کاهش اندازه مجموعه داده‌های کالیبراسیون تا اندازه 40 درصد اختلاف زیادی با یکدیگر ندارند. البته میانگین درصد خطای مدل (MAPE) در اندازه‌ی 20 درصد مجموعه داده‌های کالیبراسیون نیز برابر با 1.80 درصد شد که قابل قبول است. با توجه به آنکه مقادیر ضریب رگرسیونی محاسبه شده وابسته به مجموعه داده‌های کالیبراسیون است، لذا از بین 100 مجموعه بهترین مجموعه داده را که منجر به نتایج قابل قبول در هر دو مرحله کالیبراسیون و تست می‌شود؛ انتخاب شد. مقایسه‌ی این نتایج با مقادیر خطای مدل برای زمانی که همه داده‌ها برای کالیبراسیون استفاده می‌شوند، نشان می‌دهد که مدل رگرسیونی از قابلیت تعمیم پذیری خوبی برخوردار است و می‌توان به آن اطمینان کرد. همچنین به دلیل پایین بودن مقدار انحراف معیار خطاها، می‌توان بیان کرد که مدل از خاصیت پایداری پیش بینی خوبی برخوردار است.

لازم به ذکر است که مدل پیشنهادی توانایی محاسبه‌ی ضریب تمرکز تنش با خطای کمتر از یک درصد برای صفحات ایزوتروپیک و ارتوتروپیک را دارد. علاوه بر موارد ذکر شده مطالعه‌ی حاضر با حلّ لخنیتسکی برای مواد با خصوصیات مختلف نیز مقایسه شده که نتایج آن در قالب جدول 8 گزارش شده است. اختلاف ناچیز مطالعه‌ی حاضر با حلّ لخنیتسکی تأکیدی بر صحت رابطه‌ی ارائه شده در مقاله حاضر می‌باشد.

نتایج ما تا اینجا نشان داد که می‌توان به مدلی که بر پایه روش رگرسیونی استخراج شده است در تخمین ضریب تمرکز تنش گشودگی دایره‌ای اطمینان کرد. بنابراین مدل نهایی جهت برآورد ضریب تمرکز تنش به شکل رابطه‌ی (14) قابل ارائه است.

$$\sigma_{\theta}/\sigma_0 = 3.85 - 2.40(E_2/E_1) + 0.13(E_1/G_{12}) + 2.07v_{12} - 2.92(E_2/E_1)x_3 - 0.05(E_1/G_{12})v_{12} + 1.60(E_2/E_1)^2 - 0.0005(E_1/G_{12})^2 - 1.62v_{12}^2 \quad (14)$$

**4- نتیجه گیری**

در این پژوهش، با استفاده از یک روش حلّ تحلیلی برپایه روش متغیر مختلط، توزیع تنش برای تعداد 103 ماده از صفحات ارتوتروپیک دارای

Elasticity, 2nd englished, The Netherlands, P. NoordhooffLtd, pp. 1-681, 1962.

[3] G. N. Savin, *Stress Concentration Around Holes*, New York, Pergamon Press, pp. 1-265, 1961.

[4] S. G. Lekhnitskii, *Anisotropic Plates*, 2nd ed., New York, Gordonand Breach Science Publishers, pp. 1-534, 1968.

[5] D. S. Sharma, Stress concentration around circular elliptical triangular cutouts in infinite composite plate, *Proceedings of the World Congress on Engineering*, WCE 2011, London, U.K., July 6 – 8, Vol. 3, 2011.

[6] M. Mohammadi, J. R. Dryden, L. Jiang, Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate, *Journal of Solids and Structures*, Vol. 48, No. 3, pp. 483–491, 2011.

[7] A. Khechai, A. Tati, A. Guettala, Finite element analysis of stress concentrations and failure criteria in composite plates with circular holes, *Frontiers of Mechanical Engineering*, Vol. 9, No. 3, pp. 281-294, 2014.

[8] M. Banerjee, N. K. Jain, S. Sanyal, Stress concentration in isotropic and orthotropic composite plates with center circular hole subjected to transverse static loading, *International Journal of Mechanical and Industrial Engineering*, Vol. 3, No. 1, pp. 109-113, 2013.

[9] P. Dharmin, P. Khushbu, J. Chetan, A review on stress analysis of an infinite plate with cut-outs, *International Journal of Scientific and Research Publications*, Vol. 2, No. 11, pp. 1-7, 2012.

[10] V. G. Aradhye, S. S. Kulkarni, Experimental investigation of stress concentration factor in an isotropic and orthotropic plate with multiple circular holes, *International Journal of Science, Engineering and Technology Research*, Vol. 4, No. 11, 2015.

[11] N. M. Abuefoutouh, Preliminary design of unstiffend composite shells, *Symposium of 7th technical Conference of ASC*, pp. 693-786, 1993.

[12] L. Zhuang, B. Su, M. Lin, Yi. Liao, Y. Peng, Y. Zhou, D. Luo, Influence of the property of hole on stress concentration factor for isotropic plates, *10th International Conference on Composite Science and Technology*, 2015.

[13] A. Kumar, A. Agrawal, R. Ghadai, K. Kalita, Analysis of Stress Concentration in Orthotropic Laminates, *Procedia Technology*, Vol. 23, pp. 156-162, 2016.

[14] M. Jafari, M. Ghannad, A. Ameri, Study of the stress distribution around circular hole in heterogeneous plate subjected to in-plane loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 6, pp. 249-256, 2015. (in Persian فارسی)

[15] M. Jafari, E. Ardalani, Analytical solution to calculate the stress distribution around a triangular hole in finite isotropic plates under in-plane loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 165-175, 2015. (in Persian فارسی)

[16] M. Jafari, S. A. Mahmudzade hoseyni, Optimization of Influence Parameter on isotropic plates with Regular polygonal cutouts using particle swarm Algorithm, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 12, pp. 243-253, 2015. (in Persian فارسی)

[17] M. Jafari, B. Moshiri Aval, Stress analysis of symmetric composite laminates with quasi-rectangular hole subjected to in-plane loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 395-404, 2014. (in Persian فارسی)

[18] M. H. Dirikolu, A. Aktas, Analytical and finite element comparisons of stress intensity factors of composite materials, *Composite Structures*, Vol. 50, No. 1, pp. 99–102, 2000.

[19] M. Karama, L. Toubal, B. Lorrain, Stress concentration in a circular hole in composite plate, *Composite Structures*, Vol. 68, No. 1, pp. 31–36, 2005.

[20] M. Fakoor, S. Z. Hossein Abadi, R. Rafiee, Extension of maximum tensile stress criterion to mixed mode fracture of orthotropic materials considering t-stress, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 10, pp. 292-300, 2017. (in Persian فارسی)

[21] K. Kaw, *Mechanics of Composite Materials*, Second Edittion, pp. 6-9, Taylor & Francis Group, 2006.

[22] E. O. Ayorinde, R. F. Gibson, Elastic constants of orthotropic composite materials using plate resonance frequencies, classical lamination theory and an optimized three-mode rayleigh formulation, *Compositrcs Engineering*, Vol. 3, No. 5, pp. 395-407, 1993.

[23] I. M. Daniel, O. Ishai, *Engineering Mechanics of Composite Materials*, New York, Oxford university press, Vol. 3, pp. 34-35, 1994.

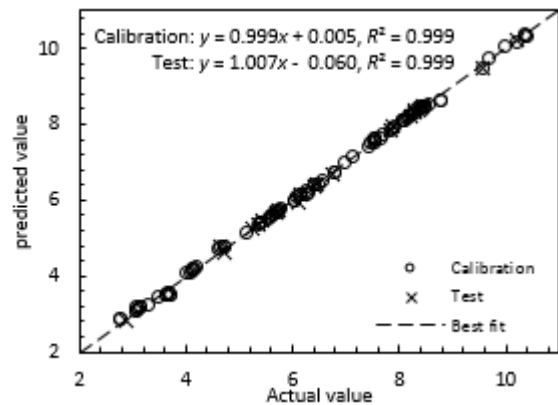


Fig. 4 Validation of the values of the realistic and predicted stress concentration coefficient by the MLR model

شکل 4 ارزیابی توافقی مقادیر ضریب تمرکز تنش واقعی و پیش بینی شده توسط مدل MLR

جدول 8 مقایسه‌ی مقادیر تنش در مطالعه‌ی حاضر و حل لخنیتسکی [4]

Table 8 Comparison of stress values in the present study and Lekhnitsky solution [4]

مطالعه حاضر	حل لخنیتسکی	$\nu_{12}$	$G_{12}$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$E_1$ (GPa)
6.7344	6.7504	0.28	7.17	10.3	181
4.1361	4.1133	0.25	7	16.2	47.4

گشودگی دایره‌ای محاسبه شد؛ سپس با استفاده از رگرسیون خطی چندگانه سعی شد تا رابطه‌ای صریح بین ضریب تمرکز تنش و خواص مکانیکی برای صفحه‌ی ارتوتروپیک دارای گشودگی دایره‌ای ارائه گردد.

همان‌طور که نتایج نشان داد در هر دو مرحله کالیبراسیون مدل و تست آن مقدار ضریب همبستگی بین دو مجموعه داده‌ی واقعی و پیش بینی شده برابر با 0.999 شد. همچنین شیب و عرض از مبدا خط رگرسیونی ما بین دو مجموعه داده مذکور تقریباً برابر با یک و نزدیک به صفر شد. لذا عملکرد مدل MLR در مرحله‌ی تست نیز کاملاً قابل قبول است. در نتیجه درستی حل پیشنهادی بررسی و تأیید شد.

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی (14) در مواد ارتوتروپیک با گشودگی دایره‌ای، وابسته به نیاز طراح و همچنین در نظر گرفتن محدودیت‌های طراحی، به راحتی می‌توان به کمترین تمرکز تنش با استفاده از خواص مکانیکی مورد نظر طراح دست یافت.

## 5- مراجع

[1] R. C. J. Howland, On the stresses in the neighborhood of circular hole in a strip under tension, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, Vol. 229, No. 670-680, pp. 49-86, 1930.

[2] N. I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of Mathematical Theory of*